Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

FEUILLE 5 - EXERCICE 10

On considère $M=\begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Calculons le polynôme caractéristique de M :

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X-a & -c & -b \\ -c & X-a-b & -c \\ -b & -c & X-a \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} X-a+b & -c & -b \\ 0 & X-a-b & -c \\ -X+a-b & -c & X-a \end{vmatrix}$$

Factorisons par $X-a+b$ puis faisons $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\chi_M(X) = (X-a+b) \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ 0 & X-a-b & -c \\ 0 & -2c & X-a-b \end{vmatrix}$$
$$= (X-a+b)\left((X-a-b)^2 - 2c^2\right)$$
$$= (X-a+b)(X-a-b-\sqrt{2}c)(X-a-b+\sqrt{2}c)$$

Notons $\alpha = a-b$, $\beta = a+b+\sqrt{2}c$ et $\gamma = a+b-\sqrt{2}c$, de sorte que $\chi_M(X) = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ et donc $\mathrm{Sp}M = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

- Si α, β et γ sont toutes distinctes, alors on sait que M est diagonalisable.
- Sinon, il y a plusieurs cas à traiter :

1) Si $\alpha = \beta$ (c'est-à-dire $a-b = a+b+\sqrt{2}c$, càd $c = -\sqrt{2}b$), alors

  * Si $\gamma = \beta$ $(=\alpha)$, on a $a+b+\sqrt{2}c = a+b-\sqrt{2}c$, d'où $c=0$ et donc (comme $c=-\sqrt{2}b$) $b=0$.
  Ainsi, $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ est diagonale, donc diagonalisable.

  * Sinon, γ est valeur propre de multiplicité 1 et α $(=\beta)$ est valeur propre de multiplicité 2.
  On a forcément $\dim E_\gamma = 1$. Cherchons $\dim E_\alpha$.
  On a $M - \alpha I_3 = \begin{pmatrix} b & c & b \\ c & 2b & c \\ b & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -\sqrt{2}b & b \\ -\sqrt{2}b & 2b & -\sqrt{2}b \\ b & -\sqrt{2}b & b \end{pmatrix}$ car $c = -\sqrt{2}b$

  Cette matrice est de rang 1 car toutes les colonnes sont colinéaires à l'une d'elles, $\begin{pmatrix} b \\ -\sqrt{2}b \\ b \end{pmatrix}$ qui est non nulle car $b \neq 0$ (sinon on aurait $b=0$ puis $c=0$ et donc $\beta = \gamma$)

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

D'après le théorème du rang, on a donc $\dim E_\alpha = 2$.
Cela montre que M est diagonalisable.

2) Le cas $\underline{\alpha = \gamma}$ se traite de la même manière.

3) Si $\underline{\beta = \gamma}$ (c'est-à-dire si $c = 0$), alors
* si $\underline{\alpha = \beta (= \gamma)}$: retour à un cas déjà traité.
* sinon, c'est que $b \neq 0$. On sait maintenant que $\dim E_\alpha = 1$!

Pour $\dim E_\beta$, on a $M - \beta I_3 = M - (a+b) I_3 = \begin{pmatrix} -b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & -b \end{pmatrix}$

Comme $b \neq 0$, $rg(M - \beta I_3) = 1$ et donc $\dim E_\beta = 2$.
M est donc diagonalisable.

<u>Conclusion</u> : M est diagonalisable quels que soient $a, b, c \in \mathbb{C}$.

<u>Remarque</u> : si $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors M est une matrice <u>symétrique réelle</u>.
Un théorème (vu au second semestre) dit que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable (et même mieux...)

⚠ Il existe des matrices symétriques complexes non diagonalisables.
Par exemple, pouvez-vous montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable ?