Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013

Cursus préparatoires, 1ère année Durée : 1 heure et 30 minutes

---

Partie commune - devoir n° 2

Exercice 2. Déterminer pour chacune des fonctions f un développement limité de f en 0 à l'ordre n :

a) $f(x) = \big(1+\cos(2x)\big)\big(x-\ln(1+x)\big)$ et $n=4$. On trouve :

$$\begin{aligned}&\big(1+\cos(2x)\big)\big(x-\ln(1+x)\big)\\ &= \big(2-2x^2+2x^4/3+o(x^4)\big)\ \big(x^2/2-x^3/3+x^4/4+o(x^4)\big)\\ &= x^2-2x^3/3-x^4/2+o(x^4)\end{aligned}$$

b) $f(x) = \frac{\ln(1+x^3)}{6[x-\sin(x)]}$ et $n=3$. On trouve :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x^3)}{6[x-\sin(x)]} &= \frac{x^3-x^6/2+o(x^6)}{x^3-x^5/20+o(x^6)} = \frac{1-x^3/2+o(x^3)}{1-x^2/20+o(x^3)}\\ &= \big(1-x^3/2+o(x^3)\big)\ \big(1+x^2/20+o(x^3)\big) = 1+x^2/20-x^3/2+o(x^3).\end{aligned}$$

c) $f(x) = e^{\sqrt{\cos(x)}}$ et $n=2$, *Indication : On peut considérer successivement les développements du cosinus, de la racine puis de l'exponentielle.* On trouve

$$e^{\sqrt{\cos(x)}} = e^{(1-x^2/2+o(x^3))^{1/2}} = e^{1-x^2/4+o(x^3)} = ee^{-x^2/4+o(x^3)} = e\big(1-x^2/4+o(x^3)\big).$$

Exercice 4. Calculer les limites suivantes :

a) $\left(\frac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)}\right)^{1/x^2}$ pour $x\to 0$, *Indication : Commencer par un D.L. de la fonction $x\mapsto \frac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)}$ autour de 0.* On trouve

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)}\right)^{1/x^2} &= \left(\frac{x-x^3/3!+o(x^4)}{x+x^3/3!+o(x^4)}\right)^{1/x^2} = \left(\frac{1-x^2/6+o(x^3)}{1+x^2/6+o(x^3)}\right)^{1/x^2}\\ &= \Big([1-x^2/6+o(x^3)]\ [1-x^2/6+o(x^3)]\Big)^{1/x^2} = \Big(1-x^2/3+o(x^3)\Big)^{1/x^2}\\ &= e^{\frac{1}{x^2}\ln(1-x^2/3+o(x^3))} = e^{\frac{1}{x^2}(-x^2/3+o(x^3))} = e^{-1/3+o(x)}.\end{aligned}$$

D'où l'on obtient que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)}\right)^{1/x^2} = e^{-1/3}$.

b) $\frac{x^e-e^x}{(x-e)^2}$ pour $x\to e$, *Indication : Penser à écrire $x = e+(x-e)$ avec $(x-e)$ petit.* En posant $h=(x-e)$ et sachant que h est proche de 0 on trouve

$$\begin{aligned}\frac{x^e-e^x}{(x-e)^2} &= \frac{(e+h)^e-e^{e+h}}{h^2} = \frac{e^e(1+h/e)^e-e^ee^h}{h^2}\\ &= \frac{e^e\big[1+eh/e+\frac{e(e-1)}{2}(h/e)^2-1-h-h^2/2+o(h^2)\big]}{h^2} = \frac{e^e[-\frac{1}{2e}h^2+o(h^2)]}{h^2}.\end{aligned}$$

D'où l'on obtient que $\lim_{x\to e}\frac{x^e-e^x}{(x-e)^2} = \lim_{h\to 0}\big[-\frac{e^e}{2e}+o(1)\big] = -\frac{e^{e-1}}{2}$.