Exercice 1. Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{C}$ telles que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ converge . Si $a = (a_n)_{n\geq 0}$ appartient à E, on pose

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$$

1. Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E. Dans la suite, on munit E de cette norme. Toutes les questions qui suivent se traiteront donc par rapport à cette norme.
2. Soit $\varphi : E \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ pour tout $a \in E$.
   a. Montrer que φ est linéaire et continue sur E.
   b. Soit $F = \{a \in E\,;\, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1\}$.
      i) Montrer que F est un fermé de E.
      ii) Montrer que F n'est pas un ouvert de E.
      Indication : on pourra chercher un élément très simple appartenant à F et utiliser la définition d'un ouvert.
      iii) Montrer que F n'est pas borné.

Correction : Notons que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

1. On a pour tout $a = (a_n)_n \in E$,

$$0 \leq \|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$$

par définition de E et donc $\|.\|$ est bien une application à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

i)

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = 0 = 0 \Leftrightarrow |a_n| = 0 \quad \forall n \Leftrightarrow a_n = 0 \quad \forall n \Leftrightarrow a = 0_E$$

où on a utilisé dans la première équivalence le fait que $|a_n| \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par suite $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0_E$ (on aurait pu le montrer aussi en séparant $\|0_E\| = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$ et $\|a\| = 0 \Rightarrow a = 0_E$ en remplaçant ci-dessus les $\Leftrightarrow$ par $\Rightarrow$).

ii) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $a = (a_n)_n \in E$

$$\|\lambda a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda a_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda||a_n| = |\lambda|\|a\|$$

d'après les propriétés des séries numériques convergentes.

iii) Soient $a = (a_n)_n$, $b = (b_n)_n \in E$, on a

$$\|a + b\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n + b_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| = \|a\| + \|b\|$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ et les propriétés des séries numériques convergentes.

Par suite $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

Remarque : Dans ii) et iii), on a utilisé la proprriété suivante pour les séries numériques convergentes : Soient $\lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ deux suites numériques (d'éléments de $\mathbb{K}$) convergentes. Alors la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0}(\lambda u_n + v_n)$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. Soit $\varphi : E \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(a) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ pour tout $a \in E$.

Notons tout d'abord que φ est bien une application à valeurs dans $\mathbb{C}$ car si $a \in E$ alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ est une série absolument convergente et donc en particulier convergente càd $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \in \mathbb{C}$.

a. Montrons que φ est une forme linéaire et qu'elle est continue sur E.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $a = (a_n)_n$, $b = (b_n)_n \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda a + b) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n + b_n) \\
&= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \\
&= \lambda\varphi(a) + \varphi(b)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que (par définition de E) les séries $\sum\limits_{n} a_n$ et $\sum\limits_{n} b_n$ sont (absolument) convergentes et donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la série numérique $\sum\limits_{n}(\lambda a_n + b_n)$ converge (absolument) et on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(\lambda a_n + b_n) = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Par suite φ est linéaire.

Reste à montrer que φ est continue.

On a pour tout $a \in E$,

$$|\varphi(a)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \|a\| \tag{1}$$

d'après les propriétés d'une série absolument convergente.

(En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left|\sum\limits_{n=0}^{N} a_n\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{N} |a_n|$, donc en passant à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient $\lim\limits_{N\to+\infty} \left|\sum\limits_{n=0}^{N} a_n\right| = \left|\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} a_n\right| = \left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leq \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} |a_n| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ où on a utilisé la continuité de l'application $t \mapsto |t|$ sur $\mathbb{R}$ dans la 1ère égalité).

1ère méthode : D'après (1), il existe $C = 1 \geq 0$ tel que $|\varphi(a)| \leq C\|a\|$ pour tout $a \in E$. Comme φ est linéaire alors (1) nous donne que φ est continue.

2ème méthode : Comme φ est linéaire, pour montrer que φ est continue, on va montrer qu'elle est bornée sur la sphère unité.

Soit $u = (u_n)_n \in S(0_E, 1)$ càd $\|u\| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 1$. On a alors d'après (1),

$$|\varphi(u)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 1.$$

Il existe donc $M = 1 \geq 0$, tel que $|\varphi(u)| \leq M$ pour tout $u \in S(0_E, 1)$. Par suite φ est bornée sur $S(0_E, 1)$ et donc comme φ est linéaire, on déduit qu'elle est continue .

b. Soit $F = \{a \in E\,;\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1\}$.

i) Montrons que F est un fermé de E. On a $F = \varphi^{-1}(\{1\})$ avec φ continue et $\{1\}$ fermé de $\mathbb{C}$ car singleton . Par suite F est un fermé de E.

ii) Montrer que F n'est pas un ouvert de E.

1ère méthode : Soit $e = (1, 0, 0, ...) \in E$ car $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |e_n| = 1 < +\infty$. On a $e \in F$ car $\sum_{n=0}^{+\infty} e_n = 1$.

Montrons que $\forall r > 0$, $B(e, r) \not\subset F$.

En effet $b = (1 + \frac{r}{2})e = (1 + \frac{r}{2}, 0, 0, ...) \in B(e, r)$ car $\|b - e\| = \|(\frac{r}{2}, 0, 0, ...)\| = \frac{r}{2} < r$ et $b \notin F$ car $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = 1 + \frac{r}{2} > 1$.

Par suite F n'est pas un ouvert de E.

2ème méthode : Pour montrer que F n'est pas un ouvert de E, on va montrer que $F^{\complement}$ n'est pas un fermé de E.

Considérons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$u^{(k)} = (1 + \frac{1}{k}, 0, 0, ...) \in E$$

car $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n^{(k)}| = 1 + \frac{1}{k} < +\infty$.

On a $u^{(k)} \in F^c$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ car $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} = 1 + \frac{1}{k} \neq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et

$$\lim_k u^{(k)} = e = (1, 0, 0, ...)$$

car $\|u^{(k)} - e\| = \|(\frac{1}{k}, 0, 0, ...)\| = \frac{1}{k} \underset{k \to +\infty}{\to} 0$ avec

$$e \notin F^{\complement} \text{ i.e. } e \in F$$

car $\sum_{n=0}^{+\infty} e_n = 1$.

Par suite $F^{\complement}$ n'est pas un fermé de E et donc F n'est pas un ouvert de E.

iii) Montrons que F n'est pas borné.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, considérons

$$u^{(k)} = (1 + k, -k, 0, 0, ...) \in E$$

car $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n^{(k)}| = |1 + k| + |-k| = 1 + 2k < +\infty$.

On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^{(k)} \in F$ car $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} = 1 + k - k = 1$ et $\|u^{(k)}\| = |1 + k| + |-k| = 1 + 2k \to +\infty$ quand $k \to +\infty$.

Par suite F n'est pas borné dans E.

Remarque : F n'est pas borné dans E, alors F n'est pas un compact de E.