Partie commune - Devoir numéro 4

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*
Tous les exercices sont indépendants.

Partie ANALYSE

Exercice 3. (8points)

1. (1pt) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que l'intervalle $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
2. Soit
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > x^2\}.$$
(Faire un dessin de l'ensemble A pourrait vous aider mais une réponse formelle aux questions est attendue.)
   a. (3 pts = 1+1+1) L'ensemble A suivant est-il un ouvert, un fermé, un compact de $\mathbb{R}^2$? (On répondra bien aux 3 questions posées.)
   b. (3pts= 2+0,5+0,5) Chercher son adhérence, intérieur et sa frontière.
3. (1 pt) $\overline{A}$ est-il un compact de $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exercice 4. (4 points) On considère $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infinie définie par : pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Soit $\mathcal{I} = \{f \in E,\ f \text{ injective }\}$.

1. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'application $f_n \in \mathcal{I}$ définie par
$$\begin{array}{rcccl} f_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x}{n} \end{array}$$
   a. (1pt) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans E vers une application f à déterminer.
   b. (1pt)En déduire que $\mathcal{I}$ n'est pas une partie fermée de E.
2. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $g_n \in \mathcal{I}^c = E \setminus \mathcal{I}$
$$\begin{array}{rcccl} g_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ x - \frac{1}{n} & \text{si} \quad \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases} \end{array}$$
   a. (1pt)Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans E vers $g = id_{[0,1]}$.
   b. (1pt) L'ensemble$\mathcal{I}$ est-il une partie ouverte de E ?

Correction de l'exercice 3

1. Soient a, $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que l'intervalle $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

   Soit $x \in]a, b[$. Prenons $r = \min(x-a, b-x) > 0$. On a bien $B(x, r) =]x-r, x+r[\subset]a, b[$ car $x - r \geq x - (x-a) = a$ $(r \leq x - a)$ et $x + r \leq x + b - x = b$ (car $r \leq b - x$).

   D'où $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

   Remarque : On aurait pu prendre n'importe quel $0 < r \leq \min(x-a, b-x)$.

2. Soit

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > x^2\}.$$

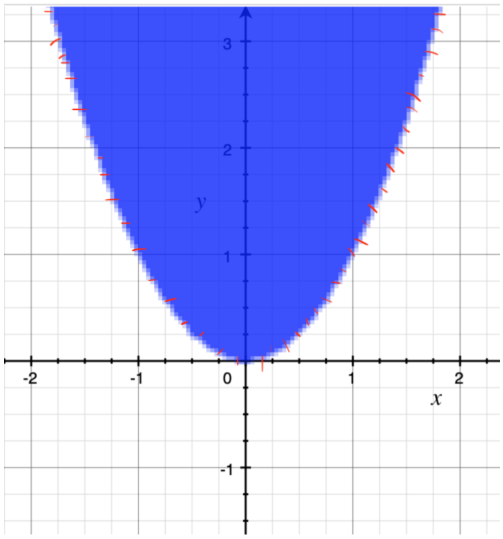

FIGURE 1 – A

a. i) A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car

1ère méthode : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = y - x^2$. L'application f est continue sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale, et on a

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y - x^2 > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x, y) > 0\} = f^{-1}(]0, +\infty[)$$

avec $]0, +\infty[$ ouvert de $\mathbb{R}$ car intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Par suite, A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car image réciproque par l'application continue f d'un ouvert de $\mathbb{R}$.

2ème méthode : Pour montrer que A est un ouvert, on va montrer que son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$

$$A^c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \leq x^2\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(u_n)_n = ((x_n, y_n))_n$ une suite d'éléments de A^c qui converge vers $u = (x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrons que $u \in A^c$ càd que $y \leq x^2$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in A^c$ donc

$$y_n \leq x_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

D'autre part

$$\lim_n u_n = u \text{ dans } \mathbb{R}^2 \iff \lim_n x_n = x \text{ et } \lim_n y_n = y \text{ dans } \mathbb{R}. \tag{2}$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans (1) en utilisant (2) et les propriétés de limites de suites, on obtient alors
$$y = \lim_n y_n \leq \lim_n x_n^2 = x^2$$
et donc $u \in A^c$.

Par suite, A^c est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et donc A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

ii) A n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$ (problème en tous les points de la parabole $y = x^2$).
En effet, pour tout $n \geq 1$, soit $u_n = (0, \frac{1}{n})$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in A$ car $y_{u_n} = \frac{1}{n} > x_{u_n}^2 = 0$ alors que $\lim_n u_n = u = (0,0) \notin A$ car $y_u = 0 = x_u^2$.
Par suite A n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$.
Remarque : On aurait pu prendre pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $u_n = (x, x^2 + \frac{1}{n})$ pour tout $n \geq 1$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in A$ car $y_{u_n} = x^2 + \frac{1}{n} > x_{u_n}^2 = x^2$ alors que $\lim_n u_n = u = (x, x^2) \notin A$ car $y_u = x_u^2$.
Par suite A n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$.

iii) Comme A n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$ alors A n'est pas un compact de $\mathbb{R}^2$.

b. Chercher son adhérence, intérieur et sa frontière.

i) Comme A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors $\mathring{A} = A$.

ii) Soit
$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq x^2\} = A \cup P$$
où $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x^2\}$.

Montrons que $H = \overline{A}$.
H est un fermé de $\mathbb{R}^2$ car $H = f^{-1}([0, +\infty[)$ avec f la fonction polynomiale définie dans 2,a.i), continue et $[0, +\infty[$ fermé de $\mathbb{R}$ car intervalle fermé.
On a donc H est un fermé de $\mathbb{R}^2$ qui contient A ($H = A \cup P$).
Comme $\overline{A}$ est le plus petit fermé de $\mathbb{R}^2$ contenant A, on déduit que
$$\overline{A} \subset H. \tag{3}$$
Reste à montrer que $H = A \cup P \subset \overline{A}$.
Comme $A \subset \overline{A}$, il suffit de montrer que $P \subset \overline{A}$.
Soit $u = (x, x^2) \in P$. Posons pour tout $n \geq 1$, $u_n = (x, x^2 + \frac{1}{n})$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in A$ car $y_{u_n} = x^2 + \frac{1}{n} > x_{u_n}^2 = x^2$ et $\lim_n u_n = u$.
Par suite, $u \in \overline{A}$. D'où $P \subset \overline{A}$ et donc
$$H = A \cup P \subset \overline{A}. \tag{4}$$
Conclusion : (3) et (4) nous donnent $\overline{A} = H$.

iii) D'après i) et ii),
$$Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = A \setminus H = P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = x^2\}.$$

c. $\overline{A}$ est-il un compact de $\mathbb{R}^2$?
$\overline{A} = H$ n'est pas un compact de $\mathbb{R}^2$ car H n'est pas borné.
En effet, $\forall M \geq 0$, il existe $u_M = (M, M^2) \in H$ avec $\|u_M\|_\infty = \max(M, M^2) \geq M$.
D'où $\overline{A} = H$ n'est pas borné et donc n'est pas un compact de $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 4 :
On considère $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie définie par : pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

Soit $\mathcal{I} = \{f \in E,\ f\ \text{ injective }\}$.

1. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'application $f_n \in \mathcal{I}$ définie par

$$\begin{array}{rccl} f_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x}{n} \end{array}$$

   a. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans E vers une application f à déterminer. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

   Par suite, $(f_n)_n$ converge vers $f = 0_E$ (l'application nulle sur $[0,1]$) dans E (muni de la norme infinie), ce qui n'est autre que la CVU de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

   b. En déduire que $\mathcal{I}$ n'est pas une partie fermée de E.
   On a trouvé une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{I}$ qui converge dans E vers $f = 0_E \notin \mathcal{I}$ car l'application nulle n'est pas injective sur $[0,1]$: en effet, pour $x_1 \neq x_2 \in [0,1]$, on a $f(x_1) = 0 = f(x_2)$.
   Par suite $\mathcal{I}$ n'est pas un fermé de E.

2. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $g_n \in \mathcal{I}^c = E \setminus \mathcal{I}$

$$\begin{array}{rccl} g_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ x - \frac{1}{n} & \text{si} \quad \frac{1}{n} < x \le 1. \end{cases} \end{array}$$

   a. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans E vers $g = id_{[0,1]}$. On a

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|g_n - g\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |g_n(x) - g(x)| \\ &= \max\left(\sup_{x\in[0,\frac{1}{n}]} |-x|, \sup_{x\in]\frac{1}{n},1]} |-\frac{1}{n}| \right) \\ &= \max(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \\ &= \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

   Par suite, $(g_n)_n$ converge vers $g = id_{[0,1]}$ dans E (muni de la norme infinie), ce qui n'est autre que la CVU de $(g_n)_n$ vers g sur $[0,1]$.

   b. L'ensemble $\mathcal{I}$ est-il une partie ouverte de E ?
   On a trouvé une suite $(g_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{I}^c$ qui converge dans E vers $g = id_{[0,1]} \in \mathcal{I}$ ($\notin \mathcal{I}^c$) car l'application identité est injective sur $[0,1]$: en effet, pour tout $x, y \in [0,1]$, $x \neq y \Rightarrow g(x) = x \neq y = g(y)$.
   Par suite, $\mathcal{I}^c$ n'est pas un fermé de E et donc $\mathcal{I}$ n'est pas un ouvert de E.