Exercice 0.1 (Correction)**.** *Soit* $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *définie par* $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$*, ainsi que* $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer* J^2, J^3.

   On trouve par calcul : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = I$.

2. *Ecrire* M *en fonction de* I, J *et* J^2*, et en déduire un polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $M = P(J)$.

   On a $M = aI + bJ + cJ^2$ donc le polynôme demandé est $P(X) = a + bX + cX^2$

3. *Montrer que* J *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$*, et que ses valeurs propres sont* $1, j$ *et* j^2*, avec* $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   On trouve $\chi(X) = det(XI - J) = (X-1)(X-j)(X-j^2)$. Le polynôme caractéristique de J est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc J est diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et ses valeurs propres sont $1, j, j^2$.

4. *En déduire que* $P(1)$*,* $P(j)$ *et* $P(j^2)$ *sont des valeurs propres (à priori complexe) de* M.

   C'est un théorème que vous avez vu. Il est cependant facile à prouver : si $\lambda \in \{1, j, j^2\}$ est une valeur propre de J et x est un vecteur propre associé, on a $Jx = \lambda x$ et donc $Mx = (aI + bJ + cJ^2)x = aIx + bJx + cJ^2x = ax + b\lambda x + c\lambda^2 x = P(\lambda)x$ donc $P(\lambda)$ est bien une valeur propre de M.

   Soit à présent $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$*. Le but de l'exercice est maintenant de diagonaliser* M *dans une base orthonormée de* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire canonique.*

5. *Justifier que* M *est diagonalisable et utiliser la question précédente pour montrer que* -1 *et* 2 *sont des valeurs propres de* M.

   La matrice M est symétrique donc diagonalisable par le théorème spectral. On a que $M = P(J)$ avec $P(X) = 1 - X - X^2$. Par la question précédente $P(1) = -1$ et $P(j) = 2$ sont des valeurs propres de J.

6. *Trouver une équation du plan* $ker(M - 2I)$ *et justifier que* $u = (1, -1, 0)$ *est un vecteur propre de* M *pour la valeur propre* 2.

   On a $(x, y, z) \in ker(M - 2I)$ si et seulement si $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}(x, y, z) = (0, 0, 0)$ si et seulement si $x + y + z = 0$. u vérifie l'équation du plan c'est donc un vecteur propre pour la valeur propre 2.

7. *Montrer qu'il existe une valeur* $\lambda \in \mathbb{R}$ *telle que* $(1, 1, \lambda)$ *soit dans* $ker(M - 2I)$*. On note* v *le vecteur ainsi obtenu. Que peut-on dire des vecteurs* u *et* v *?*

   $(1, 1, \lambda)$ est dans $ker(M - 2I)$ si et seulement si il vérifie l'équation du plan i.e. $1 + 1 + \lambda = 0$ donc $\lambda = -2$ convient. En calculant leur produit scalaire on trouve que u et v sont orthogonaux. Comme $ker(M - 2I)$ est un plan, (u, v) est une base orthogonale de ce dernier.

8. *Donner un vecteur* w *normal au plan* $ker(M - 2I)$*. Justifier que* w *est un vecteur propre de* M*. Que peut-on dire de la famille* (u, v, w) *?*

   Vu l'équation du plan $ker(M - 2I)$, $w = (1, 1, 1)$ en est un vecteur normal. De plus le théorème spectral nous dit que les sous espaces propres de M sont en somme directe orthogonale, or w est dans le supplémentaire orthogonal de $ker(M - 2I)$ donc c'est un vecteur propre pour la valeur propre -1. La famille (u, v, w) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

9. *Normaliser les trois vecteurs u, v, w et en déduire une matrice O orthogonale telle que* ${}^tOMO = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   On calcule $u' = \frac{u}{\|u\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$ $v' = \frac{v}{\|v\|} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})$ $w' = \frac{w}{\|w\|} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. La famille (u', v', w') forme une base orthonormée de vecteurs propres pour M. Soit $O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, on a donc $O^{-1}MO = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Enfin, comme (u', v', w') est une base orthonormée, O est une matrice orthogonale et donc $O^{-1} = {}^t O$ et on obtient bien la formule désirée.

10. *Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ q-orthogonale.*

    On remarque que la matrice de la forme quadratique q dans la base canonique est la matrice M de la question précédente. Comme ${}^tOMO$ est diagonale, et que c'est l'expression de la matrice de la forme quadratique q dans la base formée des colonnes de O, on en déduit que les vecteurs u', v', w' forment une base orthogonale pour la forme quadratique q.

11. *Quelle est la signature de la forme quadratique q ?*

    Par lecture sur la matrice de q dans la base u', v', w' la signature est $(2, 1)$.

12. *Question bonus. Soit* $\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. *Montrer que pour tout $M, N \in \mathscr{C}$ on a $MN = NM$.*

    M et N sont des polynômes en J donc elles commutent.