Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Correction DS 2 analyse

Ex 1

1. a. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{3n+1}$ avec $a_n = \frac{1}{n 2^n}$

Le rayon de convergence R de cette série est le même que celui de $\sum_{n\geq 1} a_n x^{3n}$

Notons R_1 le r.c de $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$.

On sait que $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ converge absolument $\forall x \in \mathbb{R}$ tq $|x| < R_1$

et diverge grossièrement $\forall x$ tq $|x| > R_1$ $(*)$

En posant $X = x^3$, on a donc d'après $(*)$

$\sum_{n\geq 1} a_n X^n = \sum_{n\geq 1} a_n x^{3n}$ conv. absolument $\forall x \in \mathbb{R}$ tq $|X| < R_1$
et diverge grossièrement $\forall x \in \mathbb{R}$ tq $|X| > R_1$

Or $|X| = |x|^3$ donc $|X| < R_1 \iff |x| < \sqrt[3]{R_1}$

Par suite $\sum_{n\geq 1} a_n x^{3n}$ conv. abs. $\forall x \in \mathbb{R}$ tq $|x| < \sqrt[3]{R_1}$

et diverge grossièrement $\forall x$ tq $|x| > \sqrt[3]{R_1}$

D'où $R = \sqrt[3]{R_1}$

Calculons R_1

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} \frac{2^n}{2^{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell = \frac{1}{2}$$

Donc $R_1 = 2$ et par suite $R = \sqrt[3]{2}$

Domaine de convergence

On sait que la série converge absolument $\forall x \in \mathbb{R}$ tq $|x| < R = \sqrt[3]{2}$ et diverge grossièrement $\forall x$ tq $|x| > \sqrt[3]{2}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ tq $|x| = \sqrt[3]{2}$ càd $x = \pm \sqrt[3]{2}$, on doit étudier la convergence

i) $x_0 = \sqrt[3]{2}$ $\quad \sum_{n \geq 1} a_n x_0^{3n+1} = \sqrt[3]{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n 2^n} \times 2^n$

$$= \sqrt[3]{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

(série harmonique $\alpha = 1$)
donc la série diverge

ii) $x_1 = -\sqrt[3]{2}$, $\quad \sum_{n \geq 1} a_n x_1^{3n+1} = -\sqrt[3]{2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n 2^n}{n 2^n}$

$$= -\sqrt[3]{2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

C'est une série alternée avec $(|u_n|)_n = \left(\frac{1}{n}\right)_n \searrow 0$ qd $n \to +\infty$

donc est convergente d'après le critère de convergence des séries alternées

Par suite $D_{conv}\left(\sum_n a_n x^{3n+1}\right) = \left[-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right[$.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

3

b) $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ avec $a_n = \dfrac{n}{3^n(2n-1)} > 0 \quad \forall n \geq 1$

$\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{n+1}{n} \dfrac{2n-1}{2n+1} \dfrac{3^n}{3^{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow R = \dfrac{1}{l} = 3$.

Domaine de convergence

On sait que $\sum_n a_n x^n$ conv. absolument $\forall x \in \mathbb{R}$ tq $|x| < R = 3$ et diverge grossièrement $\forall x \in \mathbb{R}$ tq $|x| > 3$

Reste à voir pour $|x| = 3$ càd $x = \pm 3$

Remarquons que si $|x| = 3$.

$|u_n| = |a_n x^n| = \dfrac{n\, 3^n}{(2n-1)\, 3^n} = \dfrac{n}{2n-1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$

donc $u_n = a_n x^n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ pour $x = \pm 3$.

donc la série $\sum_n a_n x^n$ diverge grossièrement si $x = \pm 3$

D'où $D_{conv}\left(\sum_n a_n x^n\right) =]-3, 3[$.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

2) Calculer le r.c R de $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n} x^n$

et sa somme sur $]-R, R[$.

On a $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{n} x^n = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{2k} x^{2k}$

car $\cos(\frac{n\pi}{2}) = 0$ si n impair

et si $n = 2k$ pair $\cos(\frac{n\pi}{2}) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

le Rayon de convergence de cette série R est égale donc à $\sqrt{R_1}$ où R_1 est le r c de $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{2k} x^k$

Calculons R_1

$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{2k}{2k+2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1 = \ell \Rightarrow R_1 = \frac{1}{\ell} = 1$

Donc $\boxed{R = \sqrt{R_1} = 1}$

Somme de la série sur $]-R, R[$

On a $\forall x \in]-1,1[\quad S(x) = -\frac{1}{2} \sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} \frac{(x^2)^k}{k}$

Comme $\ln(1+u) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{u^n}{n} \quad \forall u \in]-1,1[$

On déduit que $S(x) = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \; \forall x \in]-1,1[$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

5

Ex 2 $\quad xy'' + 2xy' + 2y = 0 \quad (E)$

avec $y'(0) = 1$.

On suppose qu'il $\exists R>0$ tq $\forall x \in]-R,R[$

$y_0(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ solution de E (y_0 est C^∞)

$y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$

$y''(x) = \sum n(n-1) a_n x^{n-2}$

En remplaçant dans (E) on obtient

$\sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 1 \text{ ou } 0} 2n a_n x^n + \sum_{n\geq 0} 2a_n x^n = 0$

$\sum_{n\geq 1 \text{ ou } 0} (n+1) n a_{n+1} x^n + \sum_{n\geq 2} 2n a_n x^n + \sum_{n\geq 0} 2a_n x^n = 0$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \left[n(n+1) a_{n+1} + 2(n+1) a_n \right] x^n + 2a_0 = 0$

$\Rightarrow \boxed{a_0 = 0}$ et $\quad \forall x \in]-R,R[$

$\Rightarrow \forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = -\frac{2}{n} a_n$

donc $a_n = -\frac{2}{n-1} a_{n-1} \quad \forall n \geq 2$

$a_{n-1} = -\frac{2}{n-2} a_{n-2}$

$\vdots$

$a_2 = -\frac{2}{1} a_1$

En multipliant ces $(n-1)$ égalités on obtient

$\Rightarrow a_n = \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{(n-1)!} a_1$

Donc $y(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n x^n = a_1 \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1} x^n}{(n-1)!}$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

6

sont les fonctions développables en séries entières solutions de (E) sur $]-R, R[$ à condition que $R > 0$

On cherche $y_0(x)$ tq $y_0'(0) = 1$

$\Rightarrow a_1 = y_0'(0) = 1$

Donc la seule solution de (E) sous forme de série entière avec $y'(0) = 1$ est

$$y_0(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{(n-1)!} x^n$$

à condition que $R > 0$

Rayon de conv. de y_0 :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2^n}{2^{n-1}} \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 = \ell$$

$\Rightarrow \boxed{R = +\infty} > 0$ donc y_0 solution de (E) $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) Exprimer $y_0(x)$ à l'aide de fonctions usuelles

$$y_0(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1} x^n}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n 2^n x^{n+1}}{n!} = x \sum_{n \geq 0} \frac{(-2x)^n}{n!}$$

$$= x e^{-2x}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.