Mathématiques 3 - PMI
Année Scolaire 2014-2015
Correction Devoir surveillé 4 : Analyse
Durée : 1 heure 30 minutes

---

**Exercice 4.**

1) L'ensemble de définition de $a$ est :

$$D_a = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

On a pour $n \geq 1$ :

$$a(1/n, 1/n) = \frac{1/n^4}{2/n^4} = 1/2$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} a(1/n, 1/n) = 1/2.$$

et d'autre part pour $n \geq 1$ :

$$a(1/n, 0) = 0$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} a(1/n, 0) = 0.$$

Donc $a$ ne peut pas être prolongée continûment en $(0,0)$.

2) L'ensemble de définition de $b$ est :

$$D_b = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

En passant en coordonnées polaires, on voit qu'il existe une fonction $\tilde{b}$ telle que pour $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ :

$$\tilde{b}(r, \theta) = b(r\cos\theta,\ r\sin\theta).$$

On a :

$$\tilde{b}(r, \theta) = \frac{(r\cos\theta + r\sin\theta)^3}{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} = r(\cos\theta + \sin\theta)^3.$$

Comme $|(\cos\theta + \sin\theta)^3| \leq 2^3 = 8$, on a, uniformément en $\theta$

$$|\tilde{b}(r, \theta) - 0| \leq G(r)$$

pour $G(r) = 8r$ et $\lim_{r \to 0} G(r) = 0$. Donc $b$ se prolonge continûment en $(0,0)$ avec $b(0,0) = 0$.

3) L'ensemble de définition de $c$ est :

$$D_c = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) |\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x - y = 2k\pi.\}.$$

On a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0);\ (x,y)\in D_c} (x-y) = 0.$$

D'autre part, au voisinage de $(0,0)$, on a $\cos(z) - 1 \sim -z^2/2$. Donc au voisinage de $(0,0)$, pour $(x,y) \in D_c$ :

$$c(x,y) \sim \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2/2} = 2.$$

Donc $c$ se prolonge continûment en $(0,0)$ avec $c(0,0) = 2$.

4) L'ensemble de définition de $d$ est :

$$D_d = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

On a pour $n \geq 1$ :

$$d(0,1/n) = \frac{\sin(1/n)}{1/n^2} \sim_{n\to+\infty} n$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} d(0,1/n) = +\infty.$$

et d'autre part pour $n \geq 1$ :

$$d(1/n,0) = \frac{\sin(1/n)}{1/n}$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} d(1/n,0) = 1.$$

Donc $d$ ne peut pas être prolongée continûment en $(0,0)$.

5) L'ensemble de définition de $f$ est :

$$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

De même que dans l'exercice 1.2, on prouve que $f$ se prolonge continûment en $(0,0)$ avec $f(0,0) = 0$.

6) L'ensemble de définition de $g$ est :

$$D_g = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

De même que dans l'exercice 1.1, on prouve que $g$ ne peut pas se prolonger continûment en $(0,0)$.

**Exercice 5.**

1) $O$ est ouvert car si $(x, y) \in O$, alors pour la distance définie par

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|,$$

la boule $B((x, y), |x|/2)$ est continue dans $O$. En effet, si $d((x, y), (x', y')) \leq |x|/2$, alors :

$$|x - x'| \leq |x|/2$$

et donc (en considérant 2 cas suivant le signe de $x$) on a $|x'| \geq |x|/2 > 0$ donc $(x', y') \in O$.

2) La fonction $h$ est continue sur $O$. En effet, $O$ est composée de 2 parties ouvertes disjointes

$$O^+ = \{(x, y) \in R^2,\ x > 0\}$$

et

$$O^- = \{(x, y) \in R^2,\ x < 0\}.$$

Sur $O^+$, la restriction de $f$ est égale à $x$ et sur $O^-$ (où $x \neq 0$) à $y^2/x$. Donc $f$ est continue sur $O$.
Par ailleurs, $f$ n'est pas continue sur le complémentaire de $O$ qui est l'axe des ordonnées. En effet :
-D'une part, $f$ n'est pas continue en $(0, 0)$ car $h(0, 0) = 0$ et pour $n \geq 1$,

$$h\Big(\frac{-1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big) = -1$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} h\Big(\frac{-1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big) = -1.$$

-D'autre part, $f$ n'est pas continue en $(0, y)$ pour $y \neq 0$ car $h(0, y) = 0$ et d'autre part pour $n \geq 1$,

$$h\Big(\frac{-1}{n}, y\Big) = -ny^2$$

donc

$$\lim_{n \to +\infty} h\Big(\frac{-1}{n}, y\Big) = -\infty.$$

**Conclusion** : $f$ est continue seulement sur l'ensemble $O$.