CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ N°4

PARTIE I : ALGÈBRE LINÉAIRE

EXERCICE 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$ et $P = P_1 \dots P_r \in \mathbb{R}[X]$, où $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{R}[X]$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux. Alors
$$\ker P(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker P_i(u)$$
2. L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal m_u est scindé simple.

EXERCICE 2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = A$.

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $M, N \in E$. Alors
$$\begin{aligned} u(\lambda M + N) &= (\lambda M + N)B - B(\lambda M + N) \\ &= \lambda(MB - BM) + (NB - BN) \\ &= \lambda u(M) + u(N) \end{aligned}$$
d'où la linéarité de u.
2. On raisonne par récurrence sur k.
   - ⋆ Pour $k = 1$, la propriété $u(A) = A$ est vraie du fait des hypothèses sur A et B.
   - ⋆ Supposons la propriété $u(A^k) = kA^k$ vraie au rang $k \in \mathbb{N}$, et vérifions la au rang $(k+1)$. D'une part, on a $u(A^{k+1}) = A^{k+1}B - BA^{k+1}$. D'autre part,
$$\begin{aligned} (k+1)A^{k+1} &= kA^k \cdot A + A^k \cdot A \\ &= u(A^k) \cdot A + A^k \cdot u(A) \\ &= A^kBA - BA^{k+1} + A^{k+1}B - A^kBA \\ &= u(A^{k+1}) \end{aligned}$$
   La deuxième égalité vient de l'hypothèse de récurrence et des hypothèses sur A et B. La récurrence est donc établie, en on peut conclure.

   REMARQUE. En étant astucieux, on voit que ce n'est pas la meilleure présentation de calcul ... En travaillant un peu plus, on peut même se passer de la récurrence.
3. L'endomorphisme u a au plus n^2 valeurs propres car $\dim(E) = n^2$. Pour la nilpotence de A, on peut raisonner par l'absurde. Si A n'était pas nilpotente, alors pour tout entier k non nul, A^k serait non nulle, et donc vecteur propre de u, de valeur propre k par la question précédente. En particulier, u aurait une infinité de valeurs propres distinctes, ce qui contredirait le fait que u a au plus n^2 valeurs propres.

EXERCICE 3.

1. On calcule le polynôme caractéristique χ_{A_k} de A_k :

$$\chi_{A_k}(X) = \begin{vmatrix} 1-X & k & -3 \\ k & 1-X & 3 \\ 3 & k & -5-X \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2}{=} \begin{vmatrix} k+1-X & k+1-X & 0 \\ k & 1-X & 3 \\ 3 & k & -5-X \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}{=} (k+1-X) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1-k-X & 3 \\ 3 & k-3 & -5-X \end{vmatrix}$$

$$= (k+1-X)((4+2k)+(4+k)X+X^2)$$

On obtient finalement

$$\chi_{A_k}(X) = (k+1-X)(X+2)(X+2+k)$$

2. On suppose que $k \neq -3$.

(a) Soit $(x,y,z) \in E_{-2} = \ker(A_k + 2I_3)$. Alors on a

$$\begin{cases} 3x+ky-3z=0 \\ kx+y+3z=0 \\ 3x+ky-3z=0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2}{\iff} \begin{cases} (k+3)x+(k+3)y=0 \\ kx+y+3z=0 \end{cases} \underset{k+3\neq 0}{\iff} \begin{cases} x+y=0 \\ z = \left(1-\frac{k}{3}\right)x \end{cases}$$

Ainsi, $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left(1,-1,1-\frac{k}{3}\right)$ et $\dim(E_{-2}) = 1$.

(b) On remarque d'une part que pour tout k entier, $k+1 \neq -2-k$. Ensuite, 3 cas se distinguent :

- ⋆ Soit $k+1 = -2 \Leftrightarrow k = -3$, ce qui est exclus par hypothèse.
- ⋆ Soit $-2-k = -2 \Leftrightarrow k = 0$. A_k n'a que deux sous-espaces propres E_{-2} et E_1. Par la question précédente, E_{-2} est de dimension 1, mais pour $k=0$, -2 est une racine de double du polynôme caractéristique. Ainsi, A_k n'est pas diagonalisable pour $k=0$.
- ⋆ Dans les autres cas, A_k a alors toutes ses valeurs propres $-2, -2-k, k+1$ distinctes, et est donc diagonalisable.

3. On suppose que $k=-3$.

(a) On reprend le calcul de E_{-2} de la question 2.(a), qui sera modifié dans ce cas. Soit $(x,y,z) \in E_{-2} = \ker(A_k+2I_3)$. Alors on a

$$\begin{cases} 3x-3y-3z=0 \\ -3x+y+3z=0 \\ 3x-3y-3z=0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2}{\iff} x-y-z=0$$

Ainsi, $\dim(E_{-2}) = 2$. L'autre sous-espace propre est E_1, qui est au moins (exactement en fait) de dimension 1. Ainsi, la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est au moins de 3, donc exactement 3 puisque $u \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$. D'où la conclusion.

(b) D'après l'équation obtenue dans la question précédente, on a

$$E_{-2} = \mathrm{Vect}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$$

Il reste à déterminer E_1. Soit $(x,y,z) \in E_1 = \ker(A - I_3)$. Alors

$$\begin{cases} -3y-3z=0 \\ -3x+3z=0 \\ 3x-3y-3z=0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2 = L_3}{\iff} x = z = -y$$

Donc, $E_1 = \text{Vect}(1,-1,1)$. Finalement, on a donc $A = PDP^{-1}$, avec

$$D = \text{diag}(-2,-2,1),\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) On obtient tout d'abord

$$A^n = \underbrace{PD(P^{-1}P)DP^{-1}\dots PD(P^{-1}P)DP^{-1}}_{n \text{ fois}} = PD^nP^{-1}$$

par téléscopage des $P^{-1}P = I_3$. Le reste est un long calcul.

PARTIE II : TOPOLOGIE

EXERCICE 4. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

1. *Sur la notion d'ouvert.*

(a) Un ouvert U de E est un ensemble tel que pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x,r)$ de centre x et de rayon r soit incluse dans U. Un fermé de E est un ensemble tel que son complémentaire dans E est ouvert.

(b) Soit $x \in B(x_0, r)$. Intuitivement (voir figure ci-dessous), si on choisit

$$r' = r - \|x_0 - x\|$$

alors $B(x_0, r') \subset B(x,r)$ et $B(x,r)$ est bien un ouvert.

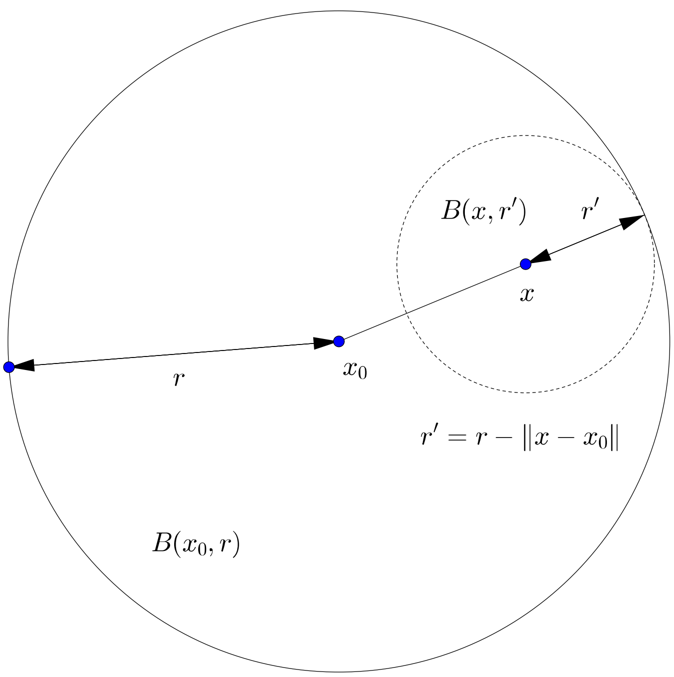

FIGURE 1

Montrons rigoureusement que le choix de r' convient. Soit $y \in B(x,r')$. Alors d'une part, $\|y-x\| < r' = r - \|x_0 - x\|$. D'autre part, l'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$\|y - x_0\| \leq \|y - x + x - x_0\| \leq \underbrace{\|y-x\|}_{<r'=r-\|x_0-x\|} + \|x - x_0\| < r$$

Donc, $y \in B(x,r)$, ce qui conclut.

2. *Un peu de compacité.*

   (a) Un compact $K \subset E$ est ensemble tel que pour toute suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$, il existe une extractrice $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (i.e ϕ strictement croissante) telle que $(x_{\phi(n)})$ soit convergente dans K.

   Si E est de dimension finie, alors K est compact si et seulement si K est fermé et borné.

   (b) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in f(K)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_k \in K$ tel que $y_k = f(x_k)$. Puisque (x_n) est une suite dans K compact, il existe une extractrice $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_{\phi(n)})$ converge vers un certain $x \in K$. Par continuité, la suite $(y_{\phi(n)}) = (f(x_{\phi(n)}))$ converge vers $f(x) \in f(K)$. Donc, $f(K)$ est compact.

EXERCICE 5. On rappelle que E est l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles.

1. Soit $f \in E$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire

$$|T(f)| = \left|\int_0^1 \phi(t)f(t)\,dt\right| \leq \left(\int_0^1 \phi(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^1 f(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|\phi\|_2\|f\|_2$$

   Donc, T est bien une application linéaire continue sur E. Ensuite, si f est non nulle, l'inégalité ci-dessus se réécrit

$$\frac{|T(f)|}{\|f\|_2} \leq \|\phi\|_2$$

   En prenant le sup sur l'ensemble des $\{f \in E; \|f\|_2 \neq 0\}$, on a $|||T||| \leq \|\phi\|_2$. Pour obtenir l'inégalité inverse, il suffit de remarquer qu'en prenant $f = \phi$, on a directement

$$|T(\phi)| = \left|\int_0^1 \phi(t)^2\,dt\right| = \|\phi\|_2^2$$

   En particulier,

$$\|\phi\|_2 = \frac{|T(\phi)|}{\|\phi\|_2} \leq |||T|||$$

   Ainsi, $|||T||| = \|\phi\|_2$.

2. Soit $f \in E$. Alors par définition de la norme infinie,

$$|T(f)| = \left|\int_0^1 \phi(t)f(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |\phi(t)f(t)|\,dt \leq \int_0^1 |\phi(t)| \cdot \|f\|_\infty\,dt = \|\phi\|_1\|f\|_\infty$$

   Donc, T est bien une application linéaire continue sur E, et en procédant comme dans la question précédente, on a $|||T||| \leq \|\phi\|_1$. Pour l'inégalité inverse, il suffit de remarquer (intuitivement, cela se voit) que

$$T(\phi_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|\phi\|_1 \quad (\star)$$

   puisque dans ce cas, on aura par définition de la norme subordonnée, que

$$\frac{\|T(\phi_n)\|}{\|\phi_n\|_\infty} \leq |||T|||$$

   pour tout n (ϕ_n ne s'annule pas donc ceci a bien un sens). Par passage à la limite, on aura ainsi

$$\|\phi\|_1 \leq |||T|||$$

   qui donne le résultat escompté.

Il reste maintenant à montrer $(\star)$. Pour cela, on a

$$|T(\phi_n) - \|\phi\|_1| = \left| \int_0^1 \frac{\phi(t)}{|\phi(t)| + \frac{1}{n}} - |\phi(t)|\, dt \right| = \int_0^1 \frac{\frac{1}{n}|\phi(t)|}{|\phi(t)| + \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to 0}{\longrightarrow} 0$$

D'où la conclusion.

EXERCICE 6.

1. Soit (y_n) une suite dans F qui converge vers $y \in \mathbb{R}$. Elle est en particulier bornée, ainsi, il reste à montrer que l'ensemble $A = \{y_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est fermé. On montre pour cela que son complémentaire est ouvert.

   Soit $z \in \mathbb{R} \setminus A$. On cherche donc $r > 0$ tel que $]z - r, z + r[\subset \mathbb{R} \setminus A$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que l'intervalle $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ ne contienne pas z (prendre par exemple $\varepsilon = |y - z|/2$). Puisque $y_n \longrightarrow y$, il existe n_0 entier tel que pour tout $n \geq n_0$, $y_n \in]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$. Ainsi, si on prend

   $$r = \min \left\{ \frac{|z - y_0|}{2}, \frac{|z - y_1|}{2}, \ldots, \frac{|z - y_{n_0-1}|}{2} \right\}$$

   alors on montre sans peine que l'on a le résultat voulu. En conséquence, $A = \{y_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$, donc compact puisque $\mathbb{R}$ est de dimension finie.

2. Soit (y_n) une suite dans $f(A)$ telle que $y_n \longrightarrow y \in F$. On peut donc trouver une suite (x_n) dans $f^{-1}(\{y_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}) \subset A$ telle que pour tout n, $y_n = f(x_n)$. Mais par la question précédente, $\{y_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ est compact dans F et puisque f est propre, $f^{-1}(\{y_n\,;\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\})$ est un compact de E. Ainsi il existe une extractrice $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $(x_{\phi(n)})$ converge vers un certain $x \in E$. Mais en réalité, $x \in A$, puisque $(x_{\phi(n)})$ est aussi une suite dans A fermé. Par continuité, la suite $(y_{\phi(n)}) = (f(x_{\phi(n)}))$ converge vers $f(x) \in f(A)$. Par unicité de la limite, $y = f(x) \in f(A)$.

3. Il manquait l'hypothèse de dimension finie sur E et F dans l'énoncé.

   Répondre à la question équivaut à montrer que

   $$\forall M > 0, \exists A > 0\,;\, x \notin \overline{B}_E(0, A) \Longrightarrow f(x) \notin \overline{B}_F(0, M)$$

   Soit $\forall M > 0$. Puisque F est de dimension finie, $\overline{B}_F(0, M)$ est compacte, et comme f est propre, $f^{-1}(\overline{B}_F(0, M))$ est compacte, et il existe donc $A > 0$ tel que $f^{-1}(\overline{B}_F(0, M)) \subset \overline{B}_E(0, A)$. Ainsi, si $x \notin \overline{B}_E(0, A)$, alors $f(x) \notin \overline{B}_F(0, M)$, et on a le résultat.