Correction - Devoir n$^{\text{o}}$ 3

Partie analyse

Exercice 1.

1. L'ensemble de définition de f est $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2+y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Pour $x \neq 0$, $f(x,0) = \dfrac{\sin(x^2)}{x^2} = \dfrac{x^2 + o(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$
   et $f(0,x) = -\dfrac{\sin(x^2)}{x^2} = -\dfrac{x^2+o(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1$.
   f n'admet donc pas de limite en $(0,0)$, elle n'est donc pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Exercice 2.

1. sh est dérivable et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch} > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Une fonction strictement croissante étant injective, sh l'est aussi et alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$, on a $\mathrm{sh}(x) \neq \mathrm{sh}(y)$, i.e $\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(y) \neq 0$. De plus, ch se n'annule pas sur $\mathbb{R}$, d'où la bonne définition de f.
2. f est évidemment continue sur l'ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, x \neq y\}$ par composée d'applications continues sur leurs ensembles de définition. Il reste à montrer la continuité de f sur $\{(t,t),\, t \in \mathbb{R}\}$.
   Soit alors $t \in \mathbb{R}$. Par continuité de ch, il suffit de montrer que pour $x \neq y$, $f(x,y) \underset{(x,y)\to(t,t)}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$.
   Or, puisque $\dfrac{x-y}{2} \underset{(x,y)\to(t,t)}{\longrightarrow} 0$, le développement limité de sh à l'ordre 1 donne $\mathrm{sh}\left(\dfrac{x-y}{2}\right) = \dfrac{x-y}{2} + \underset{(x,y)\to(t,t)}{o}(x-y)$, d'où
   $$\lim_{(x,y)\to(t,t)} \frac{x-y}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)} = 1.$$
   De plus, la continuité de $(x,y) \mapsto \dfrac{x+y}{2}$ et de ch donne $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(t,t)} \mathrm{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right) = \mathrm{ch}(t)$.
   Finalement, $$\lim_{(x,y)\to(t,t),\, x\neq y} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(t,t)} \frac{x-y}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)} . \frac{1}{\mathrm{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}$$
   et la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$ est démontrée.

Exercice 3.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On note que $A^2 = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{k,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{tr}(A^2)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} (A^2)_{i,i}\right| \text{ par définition de la trace}\\
&= \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{k,i}\right|\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}a_{k,i}| \text{ d'après l'inégalité triangulaire}\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \|A\|_\infty^2 \text{ par définition de } \|A\|_\infty\\
&= n^2\|A\|_\infty^2.
\end{aligned}
$$

2. Soit $f : M \mapsto \operatorname{tr}(M^2)$. Soient $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
f(M+H) - f(M) &= \operatorname{tr}((M+H)^2) - \operatorname{tr}(M^2)\\
&= \operatorname{tr}(MH) + \operatorname{tr}(HM) + \operatorname{tr}(H^2) \text{ par linéarité de la trace}\\
&= 2\operatorname{tr}(MH) + \operatorname{tr}(H^2) \text{ car } \operatorname{tr}(MH) = \operatorname{tr}(HM).
\end{aligned}
$$

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $H \mapsto 2\operatorname{tr}(MH)$ est linéaire par linéarité de la trace.

De plus, d'après la question précédente,
$\dfrac{|\operatorname{tr}(H^2)|}{\|H\|_\infty} \leq n^2\|H\|_\infty \underset{H\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\operatorname{tr}(H^2) = \underset{H\to 0}{o}(H)$ (le choix de la norme étant libre puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie).

f est donc différentiable et, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{d}f_M : H \mapsto 2\operatorname{tr}(MH)$.

Exercice 4.

1. Notons $f_1=(1,0,-1,0)$, $f_2=(0,1,0,-1)$ et $\mathcal{B}_F=(f_1,f_2)$.

   Déjà, $\langle f_1,f_2\rangle=0$. $\mathcal{B}_F$ est donc une famille orthogonale.

   Montrons à présent que $\mathcal{B}_F$ est une base de F :

   — Il est clair que $f_1,f_2\in F$.

   — $\mathcal{B}_F$ est trivialement libre (par définition ou parce que c'est une famille orthogonale d'éléments non nuls).

   — Soit $v=(x,y,z,t)\in F$. D'après la définition de F, $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{array}\right.$, donc (en sommant et en faisant la différence des 2 équations) $\left\{\begin{array}{l} x=-z \\ y=-t \end{array}\right.$. Il vient alors

   $v=(x,y,-x,-y)=x(1,0,-1,0)+y(0,1,0,-1)$

   et par suite $v\in \mathrm{Vect}(f_1,f_2)$. $\mathcal{B}_F$ est donc génératrice de F.

   $\mathcal{B}_F$ est donc une base orthogonale de F.

2. Notons $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et p_F la projection orthogonale sur F. D'après la question précédente, la famille $\left(\frac{f_1}{\sqrt{2}},\frac{f_2}{\sqrt{2}}\right)$ est une base orthonormée de F. On sait alors que

   $p_F(e_1)=\frac{1}{2}\langle e_1,f_1\rangle f_1+\frac{1}{2}\langle e_1,f_2\rangle f_2=\frac{1}{2}f_1=\frac{1}{2}e_1-\frac{1}{2}e_3.$

   De même,

   $p_F(e_2)=\frac{1}{2}e_2-\frac{1}{2}e_4,$

   $p_F(e_3)=-\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_3,$

   $p_F(e_4)=-\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{2}e_4.$

   Il vient donc

   $$Mat_{\mathcal{B}}(p_F)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

1. Notons $\mathbf{1}:t\mapsto 1$ et $\mathrm{Id}:t\mapsto t$. Posons $\mathcal{A}=\{g\in\mathcal{C},\ \exists a,b\in\mathbb{R},\ g:t\mapsto at+b\}=\mathrm{Vect}(\mathbf{1},\mathrm{Id})$. On remarque que

   $$\begin{aligned} \mathrm{d}(f,\mathcal{A})^2 &= \inf_{g\in\mathcal{A}}\|f-g\|^2 \\ &= \inf_{g\in\mathcal{A}}\int_0^1 (f(t)-g(t))^2\mathrm{d}t \\ &= \inf_{a,b\in\mathbb{R}}\int_0^1 (f(t)-at-b)^2\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

2. Commençons par orthonormaliser la base de $\mathcal{A}$ à l'aide du procédé de Gram-Schmidt. Notons (e_1,e_2) la base orthonormale de $\mathcal{A}$, que l'on va calculer.

   $\|\mathbf{1}\|^2=\int_0^1 \mathrm{d}t=1$ donc $e_1=\mathbf{1}$.

   $e_2\|e_2\|=\mathrm{Id}-\langle \mathrm{Id},\mathbf{1}\rangle\mathbf{1}=\mathrm{Id}-\int_0^1 t\mathrm{d}t\,\mathbf{1}=\mathrm{Id}-\frac{1}{2}\mathbf{1}$

et $\|e_2\|^2 = \displaystyle\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = 1/3 - 1/2 + 1/4 = 1/12$ donc
$e_2 = 2\sqrt{3}(\mathrm{Id} - \frac{1}{2}\mathbf{1})$.
On peut désormais calculer la projection orthogonale de $f : t \mapsto t^2$ sur $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
p_{\mathcal{A}}(f) &= \langle f, e_1\rangle e_1 + \langle f, e_2\rangle e_2 \\
&= \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t\, \mathbf{1} + 12\int_0^1 t^2(t - \frac{1}{2})\mathrm{d}t\, (\mathrm{Id} - \frac{1}{2}\mathbf{1}) \\
&= \frac{1}{3}\mathbf{1} + 12(1/4 - 1/6)(\mathrm{Id} - \frac{1}{2}\mathbf{1}) \\
&= \mathrm{Id} - \frac{1}{6}\mathbf{1}.
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, la quantité désirée est alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f, \mathcal{A})^2 &= \|f - p_{\mathcal{A}}(f)\|^2 \text{ par propriété de la projection orthogonale} \\
&= \|f - \mathrm{Id} + \frac{1}{6}\mathbf{1}\|^2 \\
&= \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2 \mathrm{d}t \\
&= 1/5 - 2/4 + 4/9 - 1/6 + 1/36 \\
&= \frac{1}{180}.
\end{aligned}$$

Exercice 6.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On pose $R = X^2 - X \in \mathbb{R}_n[X]$. On remarque que

   $u(P) = (2X - 1)P' + (X^2 - X)P'' = ((X^2 - X)P')' = (RP')'$

   d'où l'existence.

2. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned}
\langle u(P), Q\rangle &= \langle (RP')', Q\rangle \text{ d'après la question précédente} \\
&= \int_0^1 (RP')'(t)Q(t)\mathrm{d}t \text{ par définition du produit scalaire} \\
&= [(RP')(t)Q(t)]_0^1 - \int_0^1 (RP')(t)Q'(t)\mathrm{d}t \text{ après intégration par parties} \\
&= -\int_0^1 P'(t)R(t)Q'(t)\mathrm{d}t \text{ car } R(0) = R(1) = 0 \\
&= -[P(t)(RQ')(t)]_0^1 + \int_0^1 P(t)(RQ')'(t)\mathrm{d}t \text{ après intégration par parties} \\
&= \int_0^1 P(t)(RQ')'(t) \text{ car } R(0) = R(1) = 0 \\
&= \langle P, (RQ')'\rangle \\
&= \langle P, u(Q)\rangle \text{ d'après la question précédente.}
\end{aligned}$$

u est donc auto-adjoint.