Partie commune - Correction - Partie ALGÈBRE du Devoir numéro 1

Partie ALGÈBRE

Exercice 1. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application qui à tout $(f, g) \in E \times E$ associe

$$\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{dt}.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

   Soit (f, g) dans E^2. On a

$$\begin{aligned}\varphi(f, g) &= f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{dt} \\ &= g(0)f(0) + \int_0^1 g'(t)f'(t)\mathrm{dt} \\ &= \varphi(g, f).\end{aligned}$$

   Ainsi φ est symétrique. Soit (f, g, h) dans E^3 et λ dans $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(f + \lambda g, h) &= (f + \lambda g)(0)h(0) + \int_0^1 (f + \lambda g)'(t)h'(t)\mathrm{dt} \\ &= (f(0) + \lambda g(0))h(0) + \int_0^1 (f'(t) + \lambda g'(t))h'(t)\mathrm{dt} \\ &= f(0)h(0) + \lambda g(0)h(0) + \int_0^1 f'(t)h'(t)\mathrm{dt} + \lambda \int_0^1 g'(t)h'(t)\mathrm{dt} \\ &= \varphi(f, h) + \lambda\varphi(g, h).\end{aligned}$$

   Par symétrie, l'application φ est bilinéaire.
   Soit f dans E. On a

$$\varphi(f, f) = f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\mathrm{dt} \geq 0,$$

   car c'est une somme de termes positifs. De plus, si $\varphi(f, f) = 0$, alors on a

$$f(0)^2 = 0 \quad \text{et} \int_0^1 f'(t)^2\mathrm{dt} = 0.$$

   Il vient $f(0) = 0$. Comme f'^2 est une fonction continue et positive sur $[0, 1]$, on obtient que $f'(t) = 0$ pour tout t dans $[0, 1]$. Ainsi f est constante sur $[0, 1]$ et donc f est la fonction nulle.
   Ceci montre que φ est définie positive et donc est un produit scalaire sur E.

2. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire dans un espace préhilbertien.

   Soit $(E, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Alors, pour tous vecteurs x et y de E, on a

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

   De plus, les deux membres sont égaux si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.

3. Montrer que, pour tout $f \in E$, on a l'inégalité
$$|f(1) - f(0)| \leq \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 \mathrm{dt}}.$$
Discuter le cas d'égalité.

   On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec f dans E et la fonction g dans E définie, pour tout t dans $\mathbb{R}$ par $g(t) = t$. La fonction g est polynômiale donc clairement continuement dérivable sur $[0, 1]$. On obtient que
$$|\varphi(f, g)| = \left|\int_0^1 f'(t) \mathrm{dt}\right| = |f(1) - f(0)|,$$
$$\|f\| = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 \mathrm{dt}},$$
$$\|g\| = \sqrt{\int_0^1 1^2 \mathrm{dt}} = 1,$$
   où $\|\cdot\|$ est la norme associée à φ. L'inégalité
$$|\varphi(f, g)| \leq \|f\|\|g\|$$
   donne le résultat voulu. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il y a égalité si et seulement si f et g sont linéairement dépendantes, ce qui équivaut à ce qu'il existe un réel α tel que, pour tout t dans $\mathbb{R}$, on ait $f(t) = \alpha t$.

4. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies, pour tout $t \in [0, 1]$, par
$$f_1(t) = 1,\ f_2(t) = t, \quad \text{et} \quad f_3(t) = t^2.$$
Donner une base orthonormée de F pour le produit scalaire φ.

   Montrons dans un premier temps que les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont linéairement indépendantes. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ dans $\mathbb{R}^3$ tel que
$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = 0_E.$$
   Alors, pour tout t dans $[0, 1]$, on a
$$\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 = 0.$$
   En particulier, le polynôme $\alpha_1 + \alpha_2 X + \alpha_3 X^2$ a une infinité de racines. Il s'en suit que
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$
   et (f_1, f_2, f_3) est une famille libre.
   Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille (f_1, f_2, f_3) afin d'obtenir une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de F. On pose $u_1 = f_1$. On a $\|f_1\| = 1$ donc on pose
$$e_1 = f_1.$$
   Posons maintenant
$$u_2 = f_2 - \varphi(f_2, e_1)e_1 = f_2,$$
   car $\varphi(f_2, f_1) = 0$. On a
$$\|f_2\| = \sqrt{\int_0^1 1 \mathrm{dt}} = 1,$$

donc on pose $e_2 = f_2/\|f_2\| = f_2$. Enfin, on considère

$$\begin{aligned}u_3 &= f_3 - \varphi(f_3, e_1)e_1 - \varphi(f_3, e_2)e_2 \\ &= f_3 - \left(\int_0^1 2t\mathrm{dt}\right) f_2 \\ &= f_3 - \left[t^2\right]_0^1 f_2 \\ &= f_3 - f_2.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\|u_3\|^2 &= \int_0^1 (2t-1)^2\mathrm{dt} \\ &= \int_0^1 (4t^2 - 4t + 1)\mathrm{dt} \\ &= \left[\frac{4}{3}t^3 - 2t^2 + t\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} - 2 + 1 \\ &= \frac{1}{3},\end{aligned}$$

donc on pose

$$e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} = \sqrt{3}(f_3 - f_2).$$

La famille (e_1, e_2, e_3) ainsi construite est une base orthonormée de F.

5. Soit $g \in E$ la fonction définie, pour tout $t \in [0,1]$, par $g(t) = \arctan(t)$. Déterminer la projection orthogonale de g sur F.

Comme (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de F, la projection orthogonale de g sur F est donnée par la formule

$$p_F(g) = \varphi(g, e_1)e_1 + \varphi(g, e_2)e_2 + \varphi(g, e_3)e_3.$$

On a

$$\varphi(g, e_1) = g(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}\varphi(g, e_2) &= \int_0^1 g'(t)\mathrm{dt} \\ &= \arctan(1) - \arctan(0) \\ &= \pi/4,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi(g, e_3) &= \sqrt{3}\int_0^1 g'(t)(2t-1)\mathrm{dt} \\ &= \sqrt{3}\int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{dt} \\ &= \sqrt{3}\left[\ln(1+t^2) - \arctan(t)\right]_0^1 \\ &= \sqrt{3}\left(\ln(2) - \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}p_F(g) &= \frac{\pi}{4}f_2 + 3\left(\ln(2) - \frac{\pi}{4}\right)(f_3 - f_2) \\ &= \pi f_2 + 3\ln(2) f_3.\end{aligned}$$

6. Montrer qu'une fonction $f \in E$ est orthogonale à F si et seulement si

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(t)\mathrm{dt} = 0.$$

Comme F est engendré par la famille (f_1, f_2, f_3), on a $f \in F^\perp$ si et seulement si

$$\varphi(f, f_1) = \varphi(f, f_2) = \varphi(f, f_3) = 0.$$

Or, on a

$$\varphi(f, f_1) = f(0),$$

$$\varphi(f, f_2) = \int_0^1 f'(t)\mathrm{dt} = f(1) - f(0),$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(f, f_3) &= \int_0^1 f'(t)2t\mathrm{dt} \\ &= [f(t)2t]_0^1 - \int_0^1 f(t)2\mathrm{dt} \\ &= 2f(1) - 2\int_0^1 f(t)\mathrm{dt}. \end{aligned}$$

Ainsi, $f \in F^\perp$ si et seulement si

$$f(0) = 0,\ f(1) = f(0) \quad \text{et} \quad f(1) = \int_0^1 f(t)\mathrm{dt},$$

ce qui est équivalent au système

$$f(0) = f(1) = \int_0^1 f(t)\mathrm{dt} = 0,$$

comme voulu.