Correction des exercices 9, 11 et 12 du TD4

Correction de l'exercice 9 :

1. On raisonne par double implications.
   - Méthode 1 (sans les "racines carrées" de matrices symétriques positives) : Supposons que la matrice B est symétrique positive. Par la version matricielle du théorème spectral, il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle telle que $A = PDP^{-1} = PD{}^tP$. Notons $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Puisque la matrice B est symétrique positive, son spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$, ainsi, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$, on peut donc remarquer que $\lambda_i = \sqrt{\lambda_i}^2$ d'où

     $$D = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}^2, \ldots, \sqrt{\lambda_n}^2) = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})^2 = D'^2 \text{ en notant } D' = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$$

     On en déduit, puisqu'une matrice diagonale est symétrique,

     $$B = PD'^2\,{}^tP = (PD')\,{}^tD'\,{}^tP = (PD')\,{}^t(PD') = {}^tAA \quad \text{ en posant } A = {}^t(PD').$$

     Méthode 2 : Supposons la matrice B symétrique positive, par le cours, il existe donc une matrice symétrique positive telle que $B = A^2 = {}^tAA$ puisque A est symétrique.
   - Réciproquement, supposons qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tAA$, alors d'une part B est symétrique puisque ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tAA = B$. Pour le caractère positif, on peut soit démontrer que le spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$, soit revenir à la définition : pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

     $${}^tXBX = {}^tX\,{}^tAAX = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2 \geq 0.$$

     où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (associé au produit scalaire $\langle X, Y\rangle = \operatorname{Tr}({}^tXY)$). Ainsi, B est une matrice symétrique positive.
2. On reprend le même raisonnement avec les caractérisations équivalentes d'une matrice définie positive cette fois. Pour $S \in S_n(\mathbb{R})$,

   $$\begin{aligned} S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}, {}^tXSX > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Sp}(S) \subset]0; +\infty[. \end{aligned}$$

   - Supposons que B est définie positive. Par la méthode 1, on construit $A = {}^t(PD')$ telle que $B = {}^tAA$ avec A inversible puisque P l'est et D' est diagonale de coefficients diagonaux tous différents de 0 (puisque le spectre de B est inclus dans $]0; +\infty[$).

     Par la méthode 2, le cours donne directement l'existence d'une matrice symétrique définie positive A telle que $B = A^2 = {}^tAA$, avec A inversible puisqu'elle est définie positive (son spectre ne contient pas 0 puisqu'il est inclus dans $]0; +\infty[$).
   - Réciproquement, supposons qu'il existe une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tAA$, on montre comme ci-dessus que B est symétrique. De plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXBX = \|AX\|^2$ et

     $${}^tXBX = \|AX\|^2 = 0 \iff AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \iff X \in \operatorname{Ker}(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} \iff X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

     puisque la matrice A est inversible. On aurait aussi pu multiplier à gauche par A^{-1} dans l'égalité $AX = 0$ pour obtenir $X = 0$. Ainsi, B est symétrique définie positive.

Correction de l'exercice 11 :

1. L'endomorphisme $u^* \circ u$ est autoadjoint (en effet, $(u^* \circ u)^* = u^* \circ (u^*)^* = u^* \circ u$). D'après le théorème spectral, il existe donc une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de $u^* \circ u$. Notons la $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, et pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, notons λ_i la valeur propre de $u^* \circ u$ à laquelle est associé le vecteur e_i. La matrice de $u^* \circ u$ dans la base $\mathcal{B}$ est alors la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

2. Soient $i, j \in [\![1; n]\!]$ avec $i \neq j$. Par définition de l'adjoint, on a
$$\langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \langle e_i, u^*(u(e_j))\rangle = \langle e_i, u^* \circ u(e_j)\rangle = \langle e_i, \lambda_j e_j\rangle = \lambda_j \langle e_i, e_j\rangle = 0$$
puisque la famille $\mathcal{B}$ est orthogonale. Ainsi, la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est orthogonale.

3. Puisque l'endomorphisme u est supposé bijectif, il est en particulier injectif, donc son noyau est réduit à $\{0_E\}$. Par conséquent, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, le vecteur $u(e_i)$ est non nul. On en déduit que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille orthogonale composée d'éléments non nuls, donc elle est libre. Comme elle est composée de $n = \dim(E)$ vecteurs, c'est donc une base orthogonale de E. Pour obtenir une base orthonormée de E, il suffit alors de normer chacun de ces vecteurs. La famille $\mathcal{B}' = \left(\dfrac{u(e_1)}{\|u(e_1)\|}, \ldots, \dfrac{u(e_n)}{\|u(e_n)\|}\right)$ est donc une base orthonormée de E.

4. Notons $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est M. Puisque M est inversible, l'endomorphisme u est un endomorphisme bijectif de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire usuel), on peut donc appliquer les questions précédentes : il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ formée de vecteurs propres de $u^* \circ u$, et la famille $\mathcal{B}' = \left(\dfrac{u(e_1)}{\|u(e_1)\|}, \ldots, \dfrac{u(e_n)}{\|u(e_n)\|}\right)$ est une base orthonormée de E. En suivant l'indication, nous allons écrire la matrice de u dans des bases différentes au départ et à l'arrivée de $\mathbb{R}^n$, en n'oubliant pas qu'une matrice est orthogonale si et seulement s'il s'agit d'une matrice de passage entre deux bases orthonormées. On va donc chercher à utiliser celles données par les questions précédentes. Déterminons la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}'$ à l'arrivée :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \mathrm{diag}(\|u(e_1)\|, \ldots, \|u(e_n)\|) := D \quad \text{puisque } \forall i \in [\![1; n]\!], \quad u(e_i) = \|u(e_i)\| \frac{u(e_i)}{\|u(e_i)|}.$$
Par les formules de changement de bases, on a donc
$$D = Q^{-1} M P \quad \text{avec } P = \mathrm{Pass}_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}} \text{ et } \quad Q = \mathrm{Pass}_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}'}.$$
On obtient le résultat voulu en posant $U = P$ et $Q = P^{-1} = \mathrm{Pass}_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}_c}$ qui sont des matrices orthogonales puisque les bases $\mathcal{B}_c$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases **orthonormées** de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire usuel).

5. (a) Si la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ obtenue par la méthode de la question 2 était une base de $\mathbb{R}^n$, comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on aurait alors $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n)) = \mathbb{R}^n$. Par conséquent, l'endomorphisme u serait surjectif, et donc bijectif puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie. On aurait alors une contradiction avec le fait que la matrice M n'est pas inversible d'après ce que l'on a supposé. Ainsi, la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^n$.

   (b) On cherche à construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(u) \overset{\perp}{\oplus} (\mathrm{Im}(u))^\perp$. On sait déjà que la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est génératrice de $\mathrm{Im}(u)$, mais elle n'est pas libre. Comme elle est orthogonale, il suffit d'enlever les vecteurs nuls pour obtenir une famille libre. Quitte à renuméroter les vecteurs e_i, on peut supposer que pour $i \in [\![1; r]\!]$, $u(e_i) \neq 0$ et pour $i \in [\![r+1; n]\!]$, $u(e_i) = 0$. Ainsi, la famille $\left(\dfrac{u(e_1)}{\|u(e_1)\|}, \ldots, \dfrac{u(e_r)}{\|u(e_r)\|}\right)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Im}(u)$. Si l'on note $(f_{r+1}, \ldots, f_n)$ une base orthonormée de $(\mathrm{Im}(u))^\perp$, la concaténation $\mathcal{B}'' = \left(\dfrac{u(e_1)}{\|u(e_1)\|}, \ldots, \dfrac{u(e_r)}{\|u(e_r)\|}, f_{r+1}, \ldots, f_r\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(c) On va copier le procédé effectué à la question 4 à l'aide des bases orthonormées $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}''$. Pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, on a $u(e_i) = \|u(e_i)\| \dfrac{u(e_i)}{\|u(e_i)\|}$. De plus, pour $i \in [\![r+1; n]\!]$, on a $u(e_i) = 0$ par construction. Par suite, la matrice de u dans les base $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}''$ l'arrivée est $D = \text{diag}(\|u(e_1)\|, \ldots, \|u(e_r)\|, 0, \ldots, 0)$ qui est diagonale, et on procède de même qu'à la question 4.

Correction de l'exercice 12 **:** On procède par double implications.

- Supposons que l'endomorphisme u est non-expansif, c'est-à-dire que, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $u^* \circ u$. Par définition d'une valeur propre, il existe $x \in E$ avec $x \neq 0_E$ tel que $u^* \circ u(x) = \lambda x$. Comme u est non-expansif, sait que $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Pour faire apparaître l'expression $u^* \circ u$ dans le terme $\|u(x)\|$, on commence par mettre au carré cette norme afin de faire apparaître un produit scalaire et d'utiliser la définition de l'adjoint

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, u^* \circ u(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

Comme $0 \leq \|u(x)\|^2 = \lambda \|x\|^2 \leq \|x\|^2$ (puisque u est non expansif), en divisant par $\|x\|^2$ (ce qui est possible car $x \neq 0_E$ donc $\|x\|^2 > 0$), on en déduit que $0 \leq \lambda \leq 1$. Ainsi, toutes les valeurs propres de $u^* \circ u$ sont dans $[0; 1]$.

- Supposons désormais que le spectre de $u^* \circ u$ est inclus dans $[0; 1]$. Soit $x \in E$, on a vu que

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle x, u^* \circ u(x) \rangle.$$

Il nous reste désormais à utiliser l'information sur le spectre de $u^* \circ u$. Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée de E, notée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, formée de vecteurs propres de $u^* \circ u$. Pour $i \in [\![1; n]\!]$, notons $\lambda_i \in [0; 1]$ la valeur propre de $u^* \circ u$ à laquelle est associé e_i. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E, tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$. Pour tout $x \in E$, il existe donc $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\|u(x)\|^2 &= \left\langle x, u^* \circ u \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j e_j, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i \right\rangle \quad \text{car par linéarité } u^* \circ u \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{u^* \circ u(e_i)}_{=\lambda_i e_i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_j \lambda_i x_i \langle e_j, e_i \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\lambda_j}_{\in [0;1]} \underbrace{x_j^2}_{\geq 0} \quad \text{car } \langle e_j, e_i \rangle = 0 \text{ si } i \neq j \text{ et } 1 \text{ si } i = j \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \|x\|^2 \qquad \text{car la famille } \mathcal{B} \text{ est orthonormée}
\end{aligned}$$

Par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$, ce qui démontre bien que u est non expansif.