Correction de l'examen du 9 janvier 2015

L'exercice 1 est composé de questions de cours.

Exercice 2 :

1. La fonction f est la somme de la fonction $g : (x,y,z) \longmapsto x^3 + y^3 + z - 5$ polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$ (car elle admet des dérivées partielles de tout ordre continues sur $\mathbb{R}^3$), avec la fonction $h : (x,y,z) \longmapsto \cos(x+y-z)$ qui est la composée de la fonction réelle cosinus de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec la fonction polynomiale $(x,y,z) \longmapsto x+y-z$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$. Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$, donc en particulier de classe $\mathcal{C}^2$.

2. On obtient $f(1,1,2) = 0$. Puisque f est différentiable (car de classe $\mathcal{C}^2$), elle admet des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^3$ donc le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^3$ est bien défini et vaut

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x+y-z) + 3x^2 \\ -\sin(x+y-z) + 3y^2 \\ \sin(x+y-z) + 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \nabla f(1,1,2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. On va chercher à utiliser le théorème des fonctions implicites. Pour cela, on considère f comme une fonction de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f : ((x,y),z) \longmapsto f(x,y,z)$.
   - La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.
   - Le point $(1,1,2)$ vérifie $f(1,1,2) = 0$.
   - La fonction partielle $g : z \in \mathbb{R} \longmapsto f(1,1,z)$ a pour Jacobienne au point 2 une matrice carrée de taille 1 qui s'identifie au réel suivant :
   $$\frac{\partial g}{\partial z}(2) = \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,2) = 1 \neq 0$$
   ce qui démontre que $\mathrm{d}_2 f(1,1,2)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un ouvert $U_{(1,1,2)}$ de $\mathbb{R}^3$ contenant $(1,1,2)$, un ouvert $W_{(1,1)}$ de $\mathbb{R}^2$ contenant $(1,1)$ et une fonction $\varphi : W_{(1,1)} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tels que l'on a l'équivalence :
   $$((x,y,z) \in U_{(1,1,2)} \text{ et } f(x,y,z) = 0) \quad \Longleftrightarrow \quad ((x,y) \in W_{(1,1)} \text{ et } z = \varphi(x,y)). \qquad (*)$$
   En particulier, pour tout $(x,y) \in W_{(1,1)}$, $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$. De plus, comme $(1,1,2) \in U_{(1,1,2)}$ et vérifie $f(1,1,2) = 0$, le sens direct de $(*)$ donne $2 = \varphi(1,1)$.

   Dans la suite, on notera W l'ouvert $W_{(1,1)}$.

4. - Méthode 1 : On sait que pour tout $(x,y) \in W$, $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$, c'est-à-dire
   $$\forall (x,y) \in W, \quad \cos(x+y-\varphi(x,y)) + x^3 + y^3 + \varphi(x,y) - 5 = 0. \qquad (**)$$
   En dérivant ceci par rapport à x, on obtient (pour tout $(x,y) \in W$) :
   $$-\left(1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\right) \sin(x+y-\varphi(x,y)) + 3x^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 0$$

d'où en évaluant en $(1,1)$ (en utilisant le fait que $\varphi(1,1)=2$) :

$$-\left(1-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,1)\right)\sin(1+1-2)+3+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,1)=0$$

ce qui donne $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(1,1)=-3$. De même, en dérivant $(**)$ par rapport à y, on obtient,

$$-\left(1-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\right)\sin(x+y-\varphi(x,y))+3y^2+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=0$$

d'où en évaluant en $(1,1)$: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(1,1)=-3$. Par conséquent, le gradient de f en $(1,1)$ est $\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$.

- Méthode 2 : on sait d'après le cours qu'il existe un ouvert $\widetilde{W}$ inclus dans W et contenant aussi $(1,1)$ sur lequel $\mathrm{d}_2f(x,y,\varphi(x,y))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui permet d'obtenir la formule :

$$\forall (x,y)\in\widetilde{W},\quad \mathrm{d}\varphi(x,y)=-\left(\mathrm{d}_2f(x,y,\varphi(x,y))\right)^{-1}\circ \mathrm{d}_1f(x,y,\varphi(x,y))$$

ce qui donne en version matricielle (avec les Jacobiennes) :

$$J_\varphi(x,y)=-\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\right)^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))\end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=-\frac{1}{\sin(x+y-\varphi(x,y))+1}\begin{pmatrix}-\sin(x+y-\varphi(x,y))+3x^2 & -\sin(x+y-\varphi(x,y))+3y^2\end{pmatrix}.$$

Ainsi, le gradient de φ au point $(1,1)$ vaut (toujours en utilisant le fait que $\varphi(1,1)=2$) :

$$\nabla\varphi(1,1)={}^t(J_\varphi(1,1))=-\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}.$$

Remarque : les deux méthodes donnent bien sûr le même résultat, mais la formule de cours permet en général de gagner du temps.

5. On part par exemple des identités suivantes obtenues avec la 2ème méthode : pour tout $(x,y)\in\widetilde{W}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) &= \frac{\sin(x+y-\varphi(x,y))-3x^2}{\sin(x+y-\varphi(x,y))+1}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) &= \frac{\sin(x+y-\varphi(x,y))-3y^2}{\sin(x+y-\varphi(x,y))+1}\end{aligned}$$

et on dérive respectivement par rapport à x et y afin d'obtenir les dérivées croisées. Rappelons que puisque φ est de classe $\mathcal{C}^2$, le théorème de Schwarz entraîne que $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}$. On trouve : pour tout $(x,y)\in\widetilde{W}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\left(\left(1-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\right)\cos(x+y-\varphi(x,y))-6x\right)(\sin(x+y-\varphi(x,y))+1)}{(\sin(x+y-\varphi(x,y))+1)^2}\\ &\quad -\frac{(\sin(x+y-\varphi(x,y))-3x^2)\left(\left(1-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\right)\cos(x+y-\varphi(x,y))\right)}{(\sin(x+y-\varphi(x,y))+1)^2}\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(1,1)=\frac{((1+3)-6)-(-3)(1+3)}{1^2}=10.$$

De même, en dérivant $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ par rapport à y, on obtient : pour tout $(x,y)\in\widetilde{W}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\left(1-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\right)\cos(x+y-\varphi(x,y))(\sin(x+y-\varphi(x,y))+1)}{(\sin(x+y-\varphi(x,y))+1)^2}\\ &\quad -\frac{(\sin(x+y-\varphi(x,y))-3x^2)\left(\left(1-\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\right)\cos(x+y-\varphi(x,y))\right)}{(\sin(x+y-\varphi(x,y))+1)^2}\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}(1,1) = \frac{(1+3)-(-3)(1+3)}{1^2} = 16.$$

On peut remarquer que le rôle de y dans $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)$ étant le même que celui de x dans $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)$, on obtient grâce au premier calcul effectué : $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(1,1) = 10$. Ainsi, la Hessienne de φ au point $(1,1)$ est

$$\mathrm{Hess}_{\varphi}(1,1) = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}.$$

6. Puisque φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur W contenant $(1,1)$, d'après la formule de Taylor-Young, elle admet un développement limité à l'ordre 2 en $(1,1)$ donné par :

$$\begin{aligned}
\varphi((1,1)+(h,k)) &= \varphi(1,1) + \mathrm{d}\varphi(1,1)(h,k) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2\varphi(1,1)((h,k),(h,k)) + o(\|(h,k)\|^2) \\
&= 2 + h\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,1) + k\frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,1) + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(1,1) + 2hk\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(1,1) + k^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(1,1)\right) + o(\|(h,k)\|^2) \\
&= 2 - 3(h+k) + 5h^2 + 16hk + 5k^2 + o(\|(h,k)\|^2)
\end{aligned}$$

lorsque (h,k) tend vers $(0,0)$.

Correction de l'exercice 3 :

1. L'ensemble S peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 2\} &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z)\|_2^2 = 2\} \\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z)\|_2 = \sqrt{2}\} \\
&= S_{\|\ \|_2}((0,0,0),\sqrt{2})
\end{aligned}$$

c'est donc la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$ pour la norme $\|\ \|_2$. D'après le cours, S est un compact de $\mathbb{R}^2$ (dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les compacts sont exectement les ensembles fermés et bornés). De plus, la fonction f est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}^3$, donc a fortiori sur le compact non vide S, à valeurs réelles. Par le théorème des bornes atteintes, la restriction de f à S est donc bornée et atteint ses bornes (sur S).

Remarque : la fonction f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^3$ puisque $f(0,0,z) = z^6 + 6z^2 \underset{z\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. Soit $(x,y,z)\in S$. Puisque h est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$, son gradient est bien défini en (x,y,z) et vaut

$$\nabla h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

puisque le point $(0,0,0)$ n'appartient pas à S.

3. On a vu que la restriction de f à S admet un minimum et un maximum globaux. Ceux-ci sont atteints en des points d'extremum local. Soit $A=(a,b,c)\in S$. Puisque le gradient de h en A n'est pas nul, la différentielle de h en A n'est pas l'application nulle. D'après le théorème du multiplicateur de Lagrange, si f admet un extremum local en A sous la contrainte $h(x,y,z)=0$ (*i.e.* la restriction de f à S admet un extremum local en A), il existe un réel $\lambda\in\mathbb{R}$ vérifiant

$$\mathrm{d}f(A) = \lambda\mathrm{d}h(A)$$

ce qui se traduit aussi à l'aide des Jacobiennes ou des gradients : $\nabla f(A) = \lambda \nabla h(A)$. On obtient donc

$$\begin{pmatrix} -12b \\ -12a \\ 6c^5 + 12c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix}$$

d'où le système

$$\begin{cases} -12b = 2\lambda a \\ -12a = 2\lambda b \\ 6c^5 + 12c = 2\lambda c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} -6b = \lambda a \\ -6a = \lambda b \\ 3c^5 + 6c = \lambda c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases}$$

la dernière ligne provenant de l'appartenance de A à S. L'opération $L_1 \times b - L_2 \times a$ donne $6(a^2 - b^2) = 0$ d'où $a^2 = b^2$, ainsi $a = \pm b$. De plus, la ligne 3 équivaut à $c(3c^4 + (6 - \lambda)) = 0$ encore équivalent à $c = 0$ ou $c^4 = \dfrac{\lambda - 6}{3}$.

- Supposons $c = 0$, alors puisque $a^2 = b^2$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 2$, on obtient $2a^2 = 2$ et ainsi $a = \pm 1$ d'où $b = \pm 1$ ce qui donne quatre points possibles : $(1, 1, 0), (1, -1, 0), (-1, 1, 0)$ et $(-1, -1, 0)$.
- Supposons $c \neq 0$, alors $c^4 = \dfrac{\lambda - 6}{3} > 0$ donc $\lambda > 6$. On sait que $a = \pm b$. Si $a = b$, alors la première équation devient $(\lambda + 6)a = 0$ d'où $a = 0$ (car $\lambda > 6$), $b = 0$ et $c^2 = 2$. Par conséquent, on obtient encore deux points $(0, 0, \sqrt{2})$ et $(0, 0, -\sqrt{2})$. Si $a = -b$, la première équation devient $(\lambda - 6)a = 0$ d'où encore $a = 0$ (puisque $\lambda > 6$), $b = 0$ et $c = \pm\sqrt{2}$.

Comme la restriction de f à S atteint son maximum et son minimum (globaux) en un point d'extremum local, d'après l'étude ci-dessus, cela a lieu en un ou plusieurs des points suivant : $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(-1, -1, 0)$, $(0, 0, \sqrt{2})$ et $(0, 0, -\sqrt{2})$. Il ne reste donc qu'à calculer la valeur de f en ces points afin de trouver le ou les points de S en lesquels f atteint ses bornes. On obtient

$$f(1, 1, 0) = -12 = f(-1, -1, 0), \quad f(1, -1, 0) = 12 = f(-1, 1, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0, \pm\sqrt{2}) = 20.$$

Finalement, la restriction de f à S atteint son minimum en $(1, 1, 0)$ et $(-1, -1, 0)$ et celui-ci vaut -12, et son maximum en $(0, 0, \sqrt{2})$ et $(0, 0, -\sqrt{2})$ et celui-ci vaut 20.

Remarque : d'après ce que l'on vient de faire, on voit que les points $(1, -1, 0)$ et $(-1, 1, 0)$ ne sont pas des points d'extremum global mais on ne sait pas a priori si ce sont ou non des points d'extremum local de $f_{|S}$.

Correction de l'exercice 4 :

1. Toute norme sur $\mathbb{R}^2$ est 1-lipschitzienne donc continue.
2. (a) La fonction N est la composée de la fonction réelle $\sqrt{\ }$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$ avec la fonction polynomiale $g : (x, y) \longmapsto x^2 + y^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ (car elle admet des dérivées partielles de tout ordre continues sur $\mathbb{R}^2$). Puisque $x^2 + y^2 > 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, on en déduit que N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

   (b) Comme N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, elle est différentiable en tout point $(x, y) \neq (0, 0)$, et sa différentielle en (x, y) s'exprime à l'aide des dérivées partielles de N. Comme pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$

   $$\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

   on obtient

   $$\begin{array}{rccl} \mathrm{d}N(x, y) : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (h, k) & \longmapsto & h\dfrac{\partial N}{\partial x}(x, y) + k\dfrac{\partial N}{\partial y}(x, y) = \dfrac{hx + ky}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{array}$$

3. La fonction N admet une dérivée selon le vecteur $v = (a, b)$ en $(0,0)$ si et seulement si la fonction ψ : $t \longmapsto N((0,0) + tv)$ est dérivable en $(0,0)$. On étudie donc la limite lorsque t tend vers 0 ($t \neq 0$) du taux d'accroissement :
$$\frac{1}{t}\left(N(ta, tb) - N(0,0)\right) = \frac{\sqrt{t^2a^2 + t^2b^2}}{t} = \frac{|t|}{t}\sqrt{a^2 + b^2}.$$
   - Si $(a, b) \neq (0,0)$, alors $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ et le taux d'accroissement ci-dessus vérifie :
   $$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\left(N(ta, tb) - N(0,0)\right) = \sqrt{a^2 + b^2} \neq -\sqrt{a^2 + b^2} = \lim_{t \to 0^-} \frac{1}{t}\left(N(ta, tb) - N(0,0)\right)$$
   ce qui démontre que la limite quand t tend vers 0 de $\frac{1}{t}\left(N(ta, tb) - N(0,0)\right)$ n'existe pas, donc N n'admet pas de dérivée selon le vecteur v.
   - Si $(a, b) = 0$, alors
   $$\frac{1}{t}\left(N(ta, tb) - N(0,0)\right) = 0 \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$
   ce qui démontre que N admet une dérivée selon le vecteur v en $(0,0)$ et que celle-ci vaut $D_vN(0,0) = 0$.
4. D'après le cours, on sait que si N est différentiable en $(0,0)$, elle admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$ selon tout vecteur $v = (a, b)$ et $\mathrm{d}N(0,0)(a, b) = D_{(a,b)}N(0,0)$. La question précédente implique donc que N n'est pas différentiable en $(0,0)$.
5. Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, $N(x, y) > 0$, on peut écrire φ sous la forme $\varphi = f \circ N$ où
$$\begin{array}{rccc} F : & \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \dfrac{u+1}{u^2} \end{array}$$
6. On a vu que la fonction N est différentiable (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, à valeurs dans $]0; +\infty[$. De plus, la fonction d'une seule variable réelle f est différentiable sur $\mathbb{R}*$ car dérivable. D'après le théorème de composition, la fonction φ est donc différentiable sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}\varphi(x, y)(h, k) & = & \mathrm{d}(f \circ N)(x, y)(h, k) \\ & = & \mathrm{d}f(N(x, y))\left(\mathrm{d}N(x, y)(h, k)\right) \\ & = & f'(N(x, y))\dfrac{hx + ky}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ & = & \dfrac{N(x, y)^2 - (N(x, y) + 1)2N(x, y)}{N(x, y)^4}\dfrac{hx + ky}{N(x, y)} \\ & = & \dfrac{-(N(x, y) + 2)(hx + ky)}{N(x, y)^4} \end{array}$$
   On aurait aussi pu utiliser la formule avec les Jacobiennes :
$$J_\varphi(x, y) = J_f(N(x, y)) \times J_N(x, y)$$
   ce qui donne
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(N(x, y)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial N}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial N}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$
   Ainsi, $\mathrm{d}\varphi(x, y)$ est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\mathrm{d}\varphi(x, y)(h, k) = \frac{-(N(x, y) + 2)(hx + ky)}{N(x, y)^4}.$$

Remarque : l'exercice 5 traitant des fonctions convexes qui n'ont pas été traitées en cursus préparatoire, n'essayez pas de le faire sans le cours associé...