Correction de l'examen du 11 janvier 2017

Correction de l'exercice 1 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{x^n}{\sqrt{n}5^n}$. Si $x \neq 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| > 0$, donc on peut chercher à appliquer la règle de d'Alembert :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}5^{n+1}} \frac{\sqrt{n}5^n}{|x|^n} = \frac{|x|}{5}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|x|}{5}.$$

- Si $|x| < 5$ (avec $x \neq 0$), alors $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{|x|}{5} < 1$. Par conséquent, la série $\sum |u_n|$ converge, ce qui démontre la convergence absolue, et donc la convergence de la série $\sum u_n$.
- Si $|x| > 5$ alors $\dfrac{|x|}{5} > 1$. Par d'Alembert, la série $\sum |u_n|$ diverge grossièrement. Il en découle que le terme u_n ne peut pas tendre vers 0 (puisqu'alors sa valeur absolue tendrait aussi vers 0), ce qui démontre la divergence grossière de la série $\sum u_n$.
- Si $x = 0$, alors $u_n = 0$ pour tout n donc la série $\sum u_n$ converge (la suite des sommes partielles est constante égale à 0 donc elle converge vers 0), ce qui démontre la convergence absolue de la série $\sum u_n$.
- Si $x = 5$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n^{1/2}}$ qui est le terme général d'une série de Riemann divergente car d'exposant $\dfrac{1}{2} \leq 1$.
- Si $x = -5$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série alternée (puisque $(-1)^n u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$). De plus la suite $(|u_n|)_{n\in N^*} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0. Par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_n$ converge.

Finalement, la série $\sum \dfrac{x^n}{\sqrt{n}5^n}$ converge si et seulement si $x \in [-5; 5[$.

2. Soit $x \in]1; +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $v_n = (x-1)^{n \ln n} = e^{n\ln(n)\ln(x-1)} > 0$.

- Si $x - 1 > 1$ *i.e.* $x > 2$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc la série $\sum v_n$ diverge grossièrement. De même, si $x = 2$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0$ ce qui montre de nouveau que la série $\sum v_n$ diverge grossièrement.
- Si $x < 2$, alors

$$\frac{v_n}{1/n^2} = n^2 e^{n\ln(n)\ln(x-1)} = e^{2\ln(n)+n\ln(n)\ln(x-1)} = e^{\ln(n)(2+n\ln(x-1))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

  puisque $\ln(n)(2+n\ln(x-1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Par conséquent, $v_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ lorsque $n \to +\infty$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge (car la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge puisque $2 > 1$).

Ainsi, la série $\sum v_n$ converge si et seulement si $x \in]1; 2[$.

Remarque : si on a la règle de Cauchy, on peut aller légèrement plus vite. Puisque $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt[n]{v_n} = v_n^{1/n} = (x-1)^{\ln n} = e^{\ln(n)\ln(x-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } x-1 > 1 \\ 1 & \text{si } x-1 = 1 \\ 0 & \text{si } x-1 < 1 \end{cases}$$

On retrouve la divergence grossière de la série dans le cas où $x > 2$, et la convergence dans le cas où $x < 2$, il reste comme précédemment à étudier le cas $x = 2$ à part.

3. Notons $f : x \in [0;+\infty[\longmapsto x - \sqrt{1+x^2}$. La fonction f est continue sur $[0;+\infty[$, à valeurs négatives (car $1+x^2 \geq x^2$ d'où par croissance de $\sqrt{}$ sur $\mathbb{R}^+$, $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{x^2} = x$). Par suite, la convergence de l'intégrale donnée équivaut à l'intégrabilité de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

   - La continuité de f sur $[0;+\infty[$ montre que f est intégrable sur le segment $[0;A]$ pour tout $A > 0$.
   - Au voisinage de $+\infty$, on met en facteur le terme dominant :

$$\begin{array}{rcll} |f(x)| & = & \sqrt{1+x^2} - x & \\ & = & x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} - 1\right) & \\ & = & x\left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right) - 1\right) & \text{quand } x \to +\infty \\ & \underset{x\to+\infty}{\sim} & \dfrac{1}{2x} & \end{array}$$

   (on aurait aussi pu utiliser la quantité conjuguée). Puisque la fonction de Riemann n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$, il en est de même de f. Par conséquent, l'intégrale étudiée est divergente.

Correction de l'exercice 2 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$x^{2n} = (x^2)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left\{\begin{array}{cl} +\infty & \text{si } x^2 > 1 \\ 1 & \text{si } x^2 = 1 \\ 0 & \text{si } x^2 < 1 \end{array}\right.$$

   ce qui entraîne

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left\{\begin{array}{cl} 1 & \text{si } x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\\ 0 & \text{si } x \in \{-1;1\} \\ -1 & \text{si } x \in]-1;1[\end{array}\right.$$

   puisque dans le cas $x^2 > 1$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^{2n}}{x^{2n}} = 1$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{cl} 1 & \text{si } x \in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[\\ 0 & \text{si } x \in \{-1;1\} \\ -1 & \text{si } x \in]-1;1[\end{array}\right. \end{array}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ alors que la limite simple n'est pas continue. La continuité étant préservée par passage à la limite uniforme, la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $a > 0$.

   - Analyse : Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[-a;a]$, c'est forcément vers sa limite simple f. La continuité des fonctions f_n entraîne alors que f est continue sur $[-a;a]$. Puisque f est continue sur $]-1;1[$ et discontinue en ± 1, on a donc forcément $a < 1$.
   - Synthèse : supposons que $a < 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [-a;a]$, la parité de la fonction $t \longmapsto t^2$ et sa croissance sur $[0;a]$ entraînent :

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} + 1\right| = \frac{2x^{2n}}{x^{2n}+1} \leq 2a^{2n}$$

car $x^{2n} \geq 0$. Ceci démontre que la fonction $f_n - f$ est bornée sur $[-a;a]$ et comme la borne supérieure est le plus petit des majorants de l'ensemble, on en déduit

$$0 \leq \|f_n - f\|_{\infty;[-a;a]} = \sup_{x\in[-a;a]} |f_n(x) - f(x)| \leq 2a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty;[-a;a]} = 0$ ce qui démontre la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur $[-a;a]$.

Ainsi, $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[-a;a]$ si et seulement si $0 < a < 1$.

Correction de l'exercice 3 :

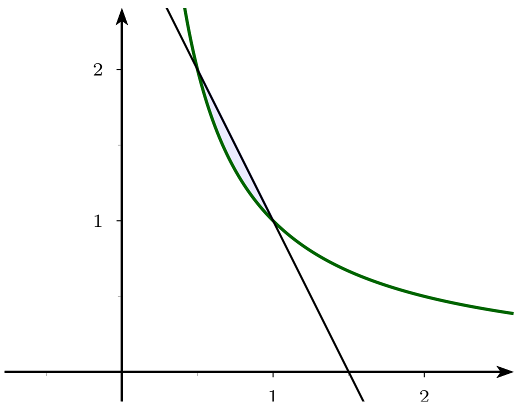
1. 

Figure 1 – Allure de $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, xy \geq 1 \text{ et } 2x + y \leq 3\}$

2. D'après le dessin ci-dessus, l'ensemble A est une partie élémentaire. De plus, par étude des points d'intersection des deux courbes, on peut écrire

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ et } \frac{1}{x} \leq y \leq 3 - 2x\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2 \text{ et } \frac{1}{y} \leq x \leq \frac{3-y}{2}\right\}. \end{aligned}$$

La fonction $(x,y) \longmapsto x$ étant continue sur D (car polynomiale), on peut donc intégrer par tranches ou par piles suivant ce que l'on préfère :

$$\begin{aligned} \iint_D x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{x=1/2}^{1} \left(\int_{y=1/x}^{3-2x} x \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{1/2}^{1} x\left(3 - 2x - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{1/2}^{1} (3x - 2x^2 - 1)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 - x\right]_{1/2}^{1} \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4 :

1. (cf dessin)

2. Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on note $(x,y,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ avec $r\geq 0$ et $\theta\in[-\pi;\pi[$. Alors

$$x\geq 0 \iff \theta\in[-\pi/2;\pi/2], y\geq 0 \iff \theta\in[0;\pi] \text{ et } x^2+y^2\leq 25 \iff r^2\leq 25 \iff r\leq 5.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3 \mid x^2+y^2\leq 25 \text{ et } x+y+z\leq 10\}\\ &= \{(r\cos\theta, r\sin\theta, z) \mid 0\leq r\leq 5, \theta\in[0;\pi/2], z\leq z\leq 10-r(\cos\theta+\sin\theta)\}\end{aligned}$$

Par le changement de variables en coordonnées cylindriques, le volume de la partie Ω est donc

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{5}\int_{z=0}^{10-r(\cos\theta+\sin\theta)} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\\ &= \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{5}(10r-r^2(\cos\theta+\sin\theta))\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_{\theta=0}^{\pi/2}\left[5r^2-\frac{r^3}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\right]_{r=0}^{5}\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\pi/2}\left(125-\frac{125}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \left[125\theta-\frac{125}{3}(\sin\theta-\cos\theta)\right]_0^{\pi/2}\\ &= 125\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 :

1. Soit $x>0$. On effectue une intégration par parties généralisée avec les fonctions $u: t\longmapsto t^x$ et $v: t\longmapsto -e^{-t}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ (celle-ci étant justifiée puisque tous les termes intervenants convergent) :

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} x t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= 0+x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

car les termes de bord sont nuls par croissance comparée et $0^x=0$ puisque $x>0$.

2. (a) Les fonctions φ et ψ sont toutes les deux continues sur $]0;+\infty[$ donc intégrables sur tout segment $[\alpha;\beta]$ inclus dans $]0;+\infty[$.

   - Au voisinage de 0, on a $t^{a-1}e^{-t}\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{1}{t^{1-a}}$ avec $1-a<1$. Par comparaison de fonctions positives avec une fonction de Riemann, la fonction $t\longmapsto t^{a-1}e^{-t}$ est donc intégrable au voisinage de 0. Il en est de même de la fonction $t\longmapsto t^{b-1}e^{-t}$. La fonction f est donc intégrable au voisinage de 0 comme somme de deux fonctions intégrables.
   De même, on a $t^{a-1}e^{-t}\left|\ln(t)\right|\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{1}{t^{1-a}\left|\ln t\right|^{-1}}$ avec $t\longmapsto\dfrac{1}{t^{1-a}\left|\ln t\right|^{-1}}$ intégrable au voisinage de 0 par la règle de Bertrand. Comme on peut faire de même avec b, la fonction ψ est aussi intégrable au voisinage de 0.

   - Au voisinage de $+\infty$, on a par croissances comparées

   $$t^2\varphi(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0 \text{ et } t^2\psi(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0 \quad \text{d'où } \varphi(t)=o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ et } \left|\psi\right|(t)=o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

   Par comparaison de fonctions positives, les fonctions φ et ψ sont donc intégrables au voisinage de $+\infty$. Par conséquent, ces deux fonctions sont intégrables sur $]0;+\infty[$.

(b) Notons $f : (x,t) \in]0;+\infty[^2 \longmapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t)-t}$.

- La fonction f est continue sur $]0;+\infty[^2$, même de classe $\mathcal{C}^\infty$, comme composée de la fonction exponentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec la fonction $(x,t) \longmapsto (x-1)\ln(t) - t$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[^2$ comme somme d'une fonction polynomiale et d'un produit d'une fonction polynomiale avec une composée de ln et d'une fonction polynomiale.
- Soient $0 < a < b$ et $(x,t) \in [a;b] \times]0;+\infty[$, alors

$$|f(x,t)| = t^{x-1}e^{-t} \leq (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t} = \varphi(t)$$

puisque la fonction $u \longmapsto t^{u-1}$ est décroissante si $t < 1$ et croissante si $t \geq 1$. Par suite, si $t < 1$, on a $t^{x-1} \leq t^{a-1} \leq t^{a-1} + \underbrace{t^{b-1}}_{\geq 0}$ et si $t \geq 1$, $t^{x-1} \leq t^{b-1} \leq t^{b-1} + \underbrace{t^{a-1}}_{\geq 0}$. La fonction φ est continue et intégrable sur $]0;+\infty[$ par la question précédente.
- De plus, la fonction f admet une dérivée partielle par rapport à x sur $]0;+\infty[^2$, donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,t) \longmapsto \ln(t)t^{x-1}e^{-t}$$

qui est continue sur $]0;+\infty[^2$.
- Pour tout $(x,t) \in [a;b] \times]0;+\infty[$, pour la même raison que ci-dessus, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq (t^{a-1} + t^{b-1})\,|\ln(t)|\,e^{-t} = |\psi(t)|$$

avec $|\psi|$ continue et intégrable sur $]0;+\infty[$.

Par le théorème de dérivation par domination, la fonction Γ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ pour tous $0 < a < b$ donc sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x > 0$, $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$. On cherche de nouveau à appliquer le théorème de dérivation mais cette fois-ci sur Γ' pour montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$. On a déjà les deux premières hypothèses du théorème par ce qui a été fait ci-dessus. De plus

- La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ admet une dérivée partielle par rapport à x sur $]0;+\infty[^2$, donnée par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : (x,t) \longmapsto t^{x-1}(\ln t)^2 e^{-t}$$

qui est continue sur $]0;+\infty[^2$.
- Enfin, pour $0 < a < b$, et pour tout $(x,t) \in [a;b] \times]0;+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = t^{x-1}(\ln t)^2 e^{-t} \leq (t^{a-1} + t^{b-1})(\ln t)^2 e^{-t} = (\ln t)^2\varphi(t)$$

avec $t \longmapsto (\ln t)^2\varphi(t)$ continue et intégrable sur $]0;+\infty[$.

Par le théorème de dérivation, Γ' est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ pour tous $0 < a < b$, donc sur $]0;+\infty[$, ce qui entraîne que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

3. Pour tout $x > 0$, pour tout $t > 0$, $t^{x-1}(\ln t)^2 e^{-t} > 0$ d'où $\Gamma''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln t)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t > 0$. Par conséquent, la fonction Γ' est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
4. On a $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$ et $\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1$. Puisque la fonction Γ est dérivable sur $[1;2]$, le théorème de Rolle entraîne l'existence d'un réel $\alpha \in]1;2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$. Comme la fonction Γ' est continue strictement croissante, elle est injective, donc il existe un unique réel $\alpha > 0$ vérifiant $\Gamma'(\alpha) = 0$.
5. La fonction Γ' est continue, strictement croissante, et s'annule en α, donc elle est négative sur $]0;\alpha]$ puis positive sur $[\alpha;+\infty[$. Par conséquent, Γ est décroissante sur $]0;\alpha]$ puis croissante sur $[\alpha;+\infty[$.