Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2018-2019

Analyse III Durée : 2 heures

Correction de l'examen final du mercredi 9 janvier 2019

Correction de l'exercice 1 :

1. Le terme u_n est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus,
$$u_n = \frac{e^{5n} + e^{-5n}}{2e^{4n}} = \frac{e^n + e^{-9n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \neq 0$$
ce qui entraîne que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement (et donc diverge).

2. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > 0$ et
$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\sqrt{n+1}e^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{\sqrt{n}e^n} = \frac{e}{\sqrt{n(n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$
donc par la règle de D'Alembert, la série $\sum v_n$ converge. Comme elle est à termes positifs, la convergence de cette série équivaut à sa convergence absolue (puisque $|v_n| = v_n$ pour tout n).

3. Puisque pour tout $n \geq 2$, $n > \sqrt{n}$, les termes w_n sont définis pour tout $n \geq 2$ (ils ne le sont pas en 0 et en 1 puisque le dénominateur s'annule). De plus, pour tout $n \geq 2$, $(-1)^n w_n = \dfrac{1}{n + (-1)^n\sqrt{n}} \geq 0$ ce qui démontre que $\sum w_n$ est une série alternée. Comme la suite $(|w_n|)_n$ n'a pas l'air décroissante, on ne peut pas directement appliquer le critère des séries alternées. On remarque que
$$|w_n| = \frac{1}{n}\frac{1}{1 + (-1)^n/\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
Puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même de $\sum |w_n|$ par comparaison de séries à termes positifs. Ainsi, la série $\sum w_n$ ne converge pas absolument.
On met en facteur le terme dominant afin d'utiliser le DL usuel $(1+u)^{-1} = 1 - u + o(u)$ lorsque $u \to 0$:
$$w_n = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^{3/2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$
On peut donc écrire
$$w_n = a_n - b_n \quad \text{avec } a_n = \frac{(-1)^n}{n} \text{ et } b_n = \frac{1}{n^{3/2}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$
   - On remarque que la suite $(a_n)_n$ est alternée, tend vers 0 et que la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, donc la série $\sum a_n$ converge par le critère des séries alternées.
   - On peut voir que $b_n = \underset{n\to+\infty}{\mathcal{O}}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ (ou $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n^{3/2} \geq 0$) donc par comparaison de séries à termes positifs (au moins à partir d'un certain rang), $\sum b_n$ converge.

   Par opérations sur les séries convergentes, la série $\sum w_n$ est aussi convergente.

Correction de l'exercice 2 :

1. Notons $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t^3 + 1/t^a}$ pour tout $t > 0$. Par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, f est continue sur $]0;+\infty[$ (en particulier sur $[1;+\infty[$, donc f est intégrable sur tout segment $[1;A]$ avec $A > 1$) . De plus, pour tout $t \geq 1$,
$$|f(t)| = \frac{|\sin(t)|}{t^3 + 1/t^a} \leq \frac{1}{t^3}$$

avec $t \longmapsto \dfrac{1}{t^3}$ intégrable sur $[1;+\infty[$. Par comparaison de fonctions (positives), f est donc aussi intégrable sur $[1;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente et donc convergente.

2. (a) Pour $t \neq 0$, on peut écrire

$$t^3 + \frac{1}{t^a} = \frac{t^{3+a}+1}{t^a} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^a}$$

par opérations valides sur les équivalents puisque $3+a>0$ donc $t^{3+a} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ et ainsi $t^{3+a}+1 \underset{t\to 0}{\sim} 1$.

(b) On a vu que la fonction f est continue sur $]0;1]$ (donc intégrable sur $[a;1]$ pour tout $0<a<1$). De plus, sin est à valeurs positives sur $]0;1]$, donc f est une fonction à valeurs positives. Par conséquent, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ équivaut à l'intégrabilité de f sur $]0;1]$. Par la question précédente et l'équivalent $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$, on trouve

$$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{1/t^a} = t^{a+1} = \frac{1}{t^{-a-1}}$$

Or la fonction de Riemann $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{-a-1}}$ est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $-a-1<1$ ce qui équivaut à $a>-2$. Ainsi, l'intégrale donnée converge si et seulement si $a>-2$.

Correction de l'exercice 3 :

1. Sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, la fonction f est le quotient de la fonction polynomiale $(x,y) \longmapsto x^3y$ par la fonction $(x,y) \longmapsto x^2+y^2$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Par opérations sur les fonctions continues de référence, f est donc continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
2. On étudie la limite de f en $(0,0)$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, notons $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0;2\pi[$. Alors

$$0 \leq |f(x,y)| = \frac{r^4\,|\cos(\theta)|\,|\sin(\theta)|}{r^2} \leq r^2 = \|(x,y)\|_2^2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = f(0,0)$$

ce qui entraîne que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ et prouve la continuité de f en $(0,0)$.

3. Les fonctions polynomiales étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, l'étude faite à la question 1 démontre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, donc elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 sur cet ouvert (qui sont aussi continues). Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y(x^2+y^2)-2x^4y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y+3x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

4. La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à x si et seulement si la fonction $x \longmapsto f(x,0)$ est dérivable en 0. On revient donc à la définition en étudiant la limite (si elle existe) du taux d'accroissement suivant : pour $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$,

$$\frac{1}{t}(f(t,0)-f(0,0)) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ce qui prouve que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe si et seulement si la fonction $y \longmapsto f(0,y)$ est dérivable en 0. Pour $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{1}{t}(f(0,t)-f(0,0)) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

5. On a déjà justifié que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. En passant encore en coordonnées polaires, pour $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \neq (0,0)$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \frac{r^5\cos^2(\theta)\,|\sin(\theta)|\,(\cos^2(\theta)+3\sin^2(\theta))}{r^4} \leq 4r = 4\|(x,y)\|_2 \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De même, avec les mêmes notations que ci-dessus et en utilisant l'inégalité triangulaire, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \frac{r^5\left|\cos^3(\theta)\right|\left|\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\right|}{r^4} \leq r(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)) = r \underset{(x,t)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

ce qui démontre que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Puisque les dérivées partielles premières de f existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

6. On revient encore une fois à la définition et au taux d'accroissement : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, si elle existe, est la dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ de la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Soit $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \frac{1}{t}\left(\frac{t^5}{t^4} - 0\right) = 1 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$$

ce qui montre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et vaut 1. De même, pour $t \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = 0 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ce qui démontre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. Ces deux dérivées partielles d'ordre 2 en $(0,0)$ sont donc bien différentes.

7. Par le théorème de Schwarz, si f était de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, alors ses dérivées partielles croisées d'ordre 2 seraient égales. En particulier, on devrait avoir $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 4 **:**

1. Pour $u \in \mathbb{R}$, on sait que

$$u^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty \text{ si } u > 1 \\ 1 \text{ si } u = 1 \\ 0 \text{ si } |u| < 1 \end{cases}$$

et n'admet pas de limite pour $u \leq -1$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$,

- Si $x \in [0;3/2[$, alors $-\dfrac{1}{2} \leq x - \dfrac{1}{2} < 1$ donc $-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par continuité de la fonction exponentielle : $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$.
- Si $x = 3/2$, alors $x - 1/2 = 1$ d'où $f_n(x) = e^{-1^n} = e^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}$.
- Si $x > 3/2$, alors $x - 1/2 > 1$ d'où $-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et par composition de limites $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \left[0;\frac{3}{2}\right[\\ e^{-1} \text{ si } x = \frac{3}{2} \\ 0 \text{ si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$par compositions de fonctions continues. Si la suite de fonctions $(f_n)_n$ convergeait uniformément sur $\mathbb{R}^+$, ce serait vers sa limite simple. La continuité étant préservée par passage à la limite uniforme, cela entraînerait la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ ce qui est absurde puisque $\lim\limits_{x \to 3/2^+} f(x) = 0 \neq e^{-1} = f(3/2)$. Ainsi, $(f_n)_n$ ne peut pas converger uniformément sur $\mathbb{R}^+$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, on a
$$|f_n(x) - f(x)| = \left|e^{-(x-1/2)^n} - 1\right| = 1 - e^{-(x-1/2)^n}$$
car $x - 1/2 \geq 0$ donc $-(x-1/2)^n \leq 0$ ce qui entraîne $e^{-(x-1/2)^n} \leq 1$. La fonction $g_n : x \longmapsto 1 - e^{-(x-1/2)^n}$ est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ de dérivée donnée par
$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], \quad g_n'(x) = +n\left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-1} e^{-(x-1/2)^n} \geq 0$$
ce qui montre que g_n est croissante sur le segment $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. La fonction $f_n - f$ étant continue sur le segment $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, elle est bornée sur ce segment, et par croissance de g_n, il vient
$$\|f_n - f\|_{\infty,[1/2;1]} = \sup_{x \in [1/2;1]} |f_n(x) - f(x)| = g_n(1) = 1 - e^{-1/2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
ce qui démontre que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. (On aurait aussi pu chercher à majorer à la main $g_n(x)$ indépendemment de x sur $\left[\frac{1}{2} : 1\right]$ afin d'obtenir une majoration de $\|f_n - f\|_{\infty,[1/2;1]}$.)

Correction de l'exercice 5 :

1. Posons $g : u \in \mathbb{R}^+ \longmapsto u - \arctan(u)$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ de dérivée donnée par
$$\forall u \in \mathbb{R}^+, \quad g'(u) = 1 - \frac{1}{1+u^2} = \frac{u^2}{1+u^2} \geq 0$$
donc la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme par ailleurs $g(0) = 0$, on en déduit que $g(u) \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^+$ ce qui équivaut à $\arctan(u) \leq u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^+$.
2. Posons $f : \mathbb{R}^+ \times]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times]0; +\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$$
de sorte que $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
   - La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+ \times]0; +\infty[$ comme quotient de la composée de la fonction $u \longmapsto \arctan(u)$ (de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$) avec la fonction polynomiale $(x,t) \longmapsto xt$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+ \times]0; +\infty[$, et de la fonction polynomiale $(x,t) \longmapsto t(1+t^2)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+ \times]0; +\infty[$ qui ne s'annule pas sur cet ensemble. En particulier, f est continue sur $\mathbb{R}^+ \times]0; +\infty[$.
   - Soit $b > 0$. Pour tout $(x,t) \in \mathbf{[0; b]} \times]0; +\infty[$, on a d'après la question 1
$$|f(x,t)| = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} \leq \frac{xt}{t(1+t^2)} \leq \frac{b}{1+t^2} := \varphi_b(t)$$
avec $\varphi_b :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue donc continue par morceaux sur $]0; +\infty[$. On peut remarquer que φ_b se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}^+$ (donc est intégrable sur $[0; A]$ pour tout $A > 0$) et vérifie $\varphi_b(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{b}{t^2}$, donc est intégrable sur $[A; +\infty[$ par la règle de Riemann. On aurait aussi pu dire que φ_b est à valeurs positives et vérifie
$$\int_0^{+\infty} \varphi_b(t)\,\mathrm{d}t = [b \arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{b\pi}{2} < +\infty$$
d'où l'intégrabilité de φ_b sur $]0; +\infty[$.

Par le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres, la restriction de F à $[0;b]$ est bien définie et continue sur $[0;b]$, ceci pour tout $b>0$, ce qui entraîne que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ (puisque la continuité est une propriété locale).

3. On a déjà vérifié les deux premiers points du théorème de dérivabilité pour les intégrales à paramètres dans la question précédente.

   - La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+ \times]0;+\infty[$ donc admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^+ \times]0;+\infty[$ et

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times]0;+\infty[\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

   - Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times]0;+\infty[$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2} := \psi(t)$$

   avec $\psi :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux (car continue) et intégrable (par la question précédente) sur $]0;+\infty[$.

   Par le théorème de dérivation, la restriction de F à $[0;b]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;b]$ ceci pour tout $b>0$, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

4. Par la décomposition donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{1-x^2}\left([\arctan(t) - x\arctan(xt)]_0^{+\infty}\right) \\ &= \frac{1}{1-x^2}(1-x)\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2(1+x)} \end{aligned}$$

5. Puisque F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $F'(x) = \dfrac{\pi}{2(1+x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad F(x) = \frac{\pi}{2}\ln|1+x| + \lambda$$

   Or d'une part $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$ et d'autre part $F(0) = \dfrac{\pi}{2}\ln 1 + \lambda = \lambda$ ce qui entraîne $\lambda = 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $F(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(1+x)$.