UNIVERSITE

CLAUDE BERNARD

LYON 1

Année universitaire : ...... / ......

Diplôme : L2 mathématiques (prépa)

Epreuve : Analyse 3

Date : janvier 2013

Nom (de jeune fille pour les femmes mariées) et prénoms.

Numéro de la carte d'étudiant :

Signature :

NOTE :

Numéro à reporter sur les intercalaires : 2424258 Nombre d'intercalaires :

<u>Questions de cours:</u>

1) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}^q$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U.
Soient $(a,b) \in U$ et $V = \{y \in \mathbb{R}^q ; (a,y) \in U\}$, qui est ouvert. On suppose que :
$f(a,b) = 0_{\mathbb{R}^q}$ et l'application partielle
$g : V \longrightarrow \mathbb{R}^q$
$y \longmapsto g(y) = f(a,y)$ est telle que $dg(b)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^q$, ou de façon équivalente, la matrice jacobienne $J_g(b)$ est inversible.
Alors il existe W_a, voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^p$, $U_{(a,b)}$, voisinage ouvert de (a,b) dans $\mathbb{R}^{p+q}$, et $\varphi : W_a \to \mathbb{R}^q$, de classe $\mathcal{C}^1$, tels que l'on ait l'équivalence suivante :

$$\big((x,y) \in U_{(a,b)},\ f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^q}\big) \iff \big(x \in W_a,\ y = \varphi(x)\big).$$

2) a) La fonction $t \in I \longmapsto g(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t)^k}{k!} g^{(k)}(t)$ est dérivable comme somme de produits de fonctions dérivables ($t \longmapsto \frac{(1-t)^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$ et $t \longmapsto g^{(k)}(t)$).

D'après la formule de Leibniz, on a :

$$\frac{d}{dt}\left(g(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t)^k}{k!} g^{(k)}(t)\right) = g'(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t)^k}{k!} g^{(k+1)}(t)$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{\cancel{k}\,(1-t)^{k-1}}{(k-1)!\,\cancel{k}} g^{(k)}(t) = g'(t) - g'(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t)^k}{k!} g^{(k+1)}(t)$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(1-t)^k}{k!} g^{(k+1)}(t)$$, par changement d'indexation.

D'où, finalement, après simplifications,

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(g(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t)^k}{k!} g^{(k)}(t)\right) = \frac{(1-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t).}$$

2)b) Si g est $\mathcal{C}^{n+1}$, la fonction $t \longmapsto \frac{(1-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)$ est continue comme produit de fonctions continues ($t \longmapsto \frac{(1-t)^n}{n!}$ et $g^{(n+1)}$).

Par suite, on peut intégrer la formule du 2)a) sur $[0,1]$ si si $[0,1] \subset I$, et l'on obtient :

$$\boxed{g(1) - g(0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t)\, dt.}$$

Exercice 1:

1) Les fonctions f et g sont polynomiales et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. En particulier, elles sont (au moins) deux fois différentiables.

2) Les points critiques de f et g sont caractérisés respectivement par $df(x,y)=0$ (dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$) et $dg(x,y)=0$ (dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$) ou, de façon équivalente par :

$$\nabla f(x,y)=0 \text{ (dans } \mathbb{R}^2 \text{) et } \nabla g(x,y)=0 \text{ (dans } \mathbb{R}^2\text{)}.$$

Or,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-y)+3x^2 \\ -2(x-y)+3y^2 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-y)+4x^3 \\ -2(x-y)+4y^3 \end{pmatrix}.$$

Donc, $\nabla f(x,y)=0$ équivaut à :

$$\begin{cases} 2(x-y)+3x^2=0, \\ -2(x-y)+3y^2=0, \end{cases} \text{ soit encore à } \begin{cases} 2(x-y)+3x^2=0, \\ 3x^2+3y^2=0, \end{cases}$$

en additionnant les deux équations. Puisque $x^2+y^2=0$ si et seulement si $(x,y)=(0,0)$, qui vérifie aussi $2(x-y)+3x^2=0$, on en déduit que $\underline{\nabla f(x,y)=0 \text{ équivaut à } (x,y)=(0,0)}$.

De façon analogue, $\nabla g(x,y)=0$ équivaut à :

$$\begin{cases} 2(x-y)+4x^3=0, \\ 4x^3+4y^3=0. \end{cases}$$

Or $x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) = (x+y)\left(\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right)$,

ce qui ne s'annule que pour $x=-y$.

Et, pour $x=-y$, $2(x-y)+4x^3=0$ équivaut à $4x+4x^3=0$, et donc à $x=0$, $y=0$. Par suite, $\underline{\nabla g(x,y)=0 \text{ si et seulement si } (x,y)=(0,0)}$.

<u>Les fonctions f et g admettent pour seul point critique : $(0,0)$.</u>

3) Calculons les matrices hessiennes de f et g en (x,y) :

$$\mathrm{Hess}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+2 & -2 \\ -2 & 6y+2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Hess}\, g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2+2 & -2 \\ -2 & 12y^2+2 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $\mathrm{Hess}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Hess}\, g(0,0)$.

Si on note $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\det A = 2\times 2 - (-2)\times(-2) = 0$.

C'est un cas où l'on ne peut pas conclure quant à la nature du point critique $(0,0)$, pour f ou pour g.

Cependant, on remarque que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) \geq 0$, comme somme de carrés de réels.

Comme $g(0,0) = 0$, le point $(0,0)$ est un minimum global pour g.

Ce n'est pas le cas pour f, car on a en particulier : $f(x,x) = 2x^3$, qui change de signe avec x.

4) i) D'après la remarque ci-dessus, le point $(0,0)$ n'est pas un extremum local pour f.

4) ii) À nouveau d'après la remarque ci-dessus, $g(x,y) \geq g(0,0)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: le point $(0,0)$ est un minimum global pour g.

4) iii) D'après la formule de Taylor-Young, on a :
$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 + o(\|(x,y)\|^2)$ quand $(x,y) \to (0,0)$.
Ici on connaît même exactement le reste :
$f(x,y) - (x^2 - 2xy + y^2) = x^3 + y^3$.
(Il n'y a rien à dire de plus ici : cette question était essentiellement sans objet.)

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 2424258

Exercice 2 :

1) La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, comme somme de produits de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$
$\left((x,y) \mapsto y - y_0,\ (x,y) \mapsto p(x,y) + p_0, \text{ et } (x,y) \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)\right.$: cette dernière est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ dans tout domaine où x ne s'annule pas.)

On calcule : $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial p}{\partial y}(x,y)\right)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}\right)$,
quel que soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
En particulier, $\boxed{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) = 1.}$

2) La fonction F étant de classe $\mathcal{C}^1$, puisque $F(x_0,y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de (x_0,y_0) :
il existe U, voisinage de (x_0,y_0), W voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi : W \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que :
$$\underline{\big((x,y) \in U,\ F(x,y) = 0\big) \iff \big(x \in W,\ y = \varphi(x)\big).}$$

3) En dérivant la fonction $x \mapsto F(x, \varphi(x))$, on obtient :
$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x)),$$ c'est-à-dire :
$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}(x,\varphi(x))\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) - \frac{1}{2x^2}\big(p(x,\varphi(x)) + p_0\big)$$
$$+ \varphi'(x)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)\right).$$
Si le facteur de $\varphi'(x)$ est non nul, ce qui est vrai pour x assez proche de x_0, on en déduit :
$$\boxed{\varphi'(x) = \frac{\dfrac{1}{2x^2}\big(p(x,\varphi(x)) + p_0\big) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}(x,\varphi(x))\right)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}\right)}{1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial p}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0}\right)}}$$

4) La formule ci-dessus se réduit, pour $x = x_0$, à :
$$\underline{\varphi'(x_0)} = \frac{1}{2x_0^2}\big(p(x_0,y_0) + p_0\big) = \underline{\frac{p_0}{x_0^2}}.$$

5) i) Pour $x \neq x_0$, $\dfrac{p(x,\varphi(x))-p_0}{x-x_0}$ est le taux d'accroissement de la fonction $x \mapsto p(x,\varphi(x))$ entre x_0 et x.
Comme cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de x_0, son taux d'accroissement admet pour limite, quand $x \to x_0$,

$$\frac{d}{dx}\left(p(x,\varphi(x))\right)\Big|_{x=x_0}.$$

Cette dérivée se calcule en utilisant à nouveau la formule de différentiation des fonctions composées :

$$\frac{d}{dx}\left(p(x,\varphi(x))\right)\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial p}{\partial x}(x_0,y_0) + \varphi'(x_0)\frac{\partial p}{\partial y}(x_0,y_0).$$

Ainsi, on a : $$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{p(x,\varphi(x))-p_0}{x-x_0} = \frac{\partial p}{\partial x}(x_0,y_0)+\varphi'(x_0)\frac{\partial p}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

5) ii) En remplaçant, dans la formule ci-dessus :

$$\varphi'(x_0) = \frac{p_0}{x_0^2} = k\frac{y_0}{x_0}, \quad \frac{\partial p}{\partial x}(x_0,y_0) = k\,y_0, \quad \frac{\partial p}{\partial y}(x_0,y_0) = k\,x_0,$$

il reste : $$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{p(x,\varphi(x))-p_0}{x-x_0} = k(1+k)y_0 = (1+k)\frac{p_0}{x_0}.}$$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N° 2424258

Exercice 3:

1) a) La fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = (au+bv, cu+dv)$
est linéaire donc différentiable, et pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, $d\varphi(u,v)(h,k) = \varphi(h,k) = (ah+bk, ch+dk)$.

1) b) La matrice jacobienne de φ au point (u,v) coïncide, d'après la remarque ci-dessus, avec la matrice de φ: pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$J_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1) c) Par hypothèse, $\det \varphi = \det J_\varphi(u,v) = ad - bc \neq 0$.
Donc φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$:
c'est donc une application bijective ; elle est différentiable car linéaire (cf 1)a)) et sa réciproque également.
Ceci signifie que φ est un difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2$.

Le système linéaire $\begin{cases} au+bv = x, \\ cu+dv = y, \end{cases}$
se résout par élimination en : $\begin{cases} u = \dfrac{dx-by}{ad-bc}, \\ v = \dfrac{-cx+ay}{ad-bc}. \end{cases}$

Ainsi, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi^{-1}(x,y) = \left(\frac{dx-by}{ad-bc}, \frac{-cx+ay}{ad-bc} \right).$$

2) La fonction $g = f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de f et de φ, la première étant $\mathcal{C}^1$ par hypothèse et la seconde étant $\mathcal{C}^1$ car linéaire. Par la formule de différentiation des fonctions composées, puisque $f = g \circ \varphi^{-1}$, on a :
pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $df(x,y) = dg(\varphi^{-1}(x,y)) \circ d\varphi^{-1}(x,y) = dg(\varphi^{-1}(x,y)) \circ \varphi^{-1}$, ou encore, sous forme matricielle :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(\varphi^{-1}(x,y)) \quad \frac{\partial g}{\partial v}(\varphi^{-1}(x,y)) \right) \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} / (ad-bc)$$

où l'on a utilisé la question 2 pour écrire la matrice de φ^{-1}.
On obtient ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{ad-bc} \left(d \dfrac{\partial g}{\partial u}(\varphi^{-1}(x,y)) - c \dfrac{\partial g}{\partial v}(\varphi^{-1}(x,y)) \right), \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{ad-bc} \left(-b \dfrac{\partial g}{\partial u}(\varphi^{-1}(x,y)) + a \dfrac{\partial g}{\partial v}(\varphi^{-1}(x,y)) \right). \end{cases}}$$

(Une méthode plus rapide et plus sûre pour aboutir à ce résultat est de 1) « dériver à vue » dans : $g(u,v) = f(au+bv, cu+dv)$,
ce qui donne $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = a \dfrac{\partial f}{\partial x}(..) + c \dfrac{\partial f}{\partial y}(..), \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = b \dfrac{\partial f}{\partial x}(..) + d \dfrac{\partial f}{\partial y}(..) ; \end{cases}$

2) résoudre, encore une fois par élimination, ce système linéaire d'« inconnues » $\dfrac{\partial f}{\partial x}(..)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(..)$.)

3) D'après la remarque ci-dessus, l'équation
$a \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + c \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$ équivaut à :

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = g(u,v) \quad , \text{ avec } (u,v) = \varphi^{-1}(x,y).$$

4) L'équation (E_2) $\dfrac{\partial g}{\partial u} = g$ admet pour solutions les fonctions $g : (u,v) \longmapsto C(v)\, e^{u}$, où C est une fonction arbitraire.
Par suite, d'après la question 3), les solutions de (E_1) sont les fonctions $f : (x,y) \longmapsto C\left(\dfrac{-cx+ay}{ad-bc}\right) \exp\left(\dfrac{dx-by}{ad-bc}\right)$.

En particulier, avec $a=b=d=1$ et $c=-1$, on trouve :
$f(x,y) = C\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \exp\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$, où C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, pour assurer que f le soit.