Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2018-2019

Analyse III Durée : 2 heures

Correction de l'examen final du mercredi 9 janvier 2019

Correction de l'exercice 1 :

1. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1$. Si $z = 0$, tous les termes $n^{(-1)^n} z^n$ sont nuls, donc la série $\sum n^{(-1)^n} z^n$ converge. Si $z \neq 0$, on peut écrire $\left|n^{(-1)^n} z^n\right| = n^{(-1)^n} |z|^n = e^{(-1)^n \ln n + n \ln|z|}$ ce qui entraîne

$$n^2 n^{(-1)^n} |z|^n = e^{n(\ln|z| + ((-1)^n + 2)\ln(n)/n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

puisque $\ln|z| < 0$, ainsi $n^{(-1)^n} |z|^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Par comparaison de séries à termes positifs et utilisation de la règle de Riemann, la série $\sum n^{(-1)^n} z^n$ converge absolument donc converge.

On aurait aussi pu dire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \left|n^{(-1)^n} z^n\right| \leq n|z^n|$. La règle de D'Alembert montre alors que le rayon de convergence de la série entière $\sum nz^n$ est 1. Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1$, la série $\sum n|z^n|$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, il en est de même de la série $\sum \left|n^{(-1)^n} z^n\right|$. La série $\sum n^{(-1)^n} z^n$ est donc convergente.

(b) Pour $z = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^{(-1)^n} z^n = n^{(-1)^n}$ qui ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. En effet, la sous-suite des termes pairs $\left((2p)^{(-1)^{2p}}\right)_{p\in\mathbb{N}} = (2p)_{p\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Par suite, la série $\sum n^{(-1)^n} 1^n$ diverge grossièrement.

(c) On a vu que pour $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1$, la série $\sum n^{(-1)^n} z^n$ converge, donc $|z| \leq R$ où R désigne le rayon de convergence de la série entière considérée. Ceci étant valable en particulier pour $z_k = 1 - \frac{1}{k}$, en faisant tendre k vers $+\infty$, on en déduit que $R \geq 1$. En outre, la série $\sum n^{(-1)^n} z^n$ diverge pour $z = 1$, ce qui entraîne $R \leq |1| = 1$ et prouve l'égalité $R = 1$.

2. (a) Par les développements usuels, on sait que pour tout $u \in]-1;1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = \frac{1}{1-u}$. Ainsi, pour tout $x \in]-1;1[$, on a $x^2 \in [0;1[$ ce qui entraîne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}.$$

Notons R' le rayon de convergence de la série entière $\sum x^{2n}$. Par l'égalité ci-dessus, on en déduit que $R' \geq 1$. Ainsi, le domaine de convergence I est inclus dans $[-1;1]$. De plus, pour $x = \pm 1$, la série numérique $\sum x^{2n} = \sum 1$ diverge grossièrement. Le domaine I est donc $]-1;1[$.

(b) On sait qu'une série entière et sa série entière dérivée ont même rayon de convergence. La série entière dérivée de $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{2n}$, qui est $\sum_{n\geq 1} 2nx^{2n-1}$, a donc pour rayon de convergence 1 et

$$\forall x \in I, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 2nx^{2n-1} = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}.$$

On en déduit que

$$\forall x \in I, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} 2nx^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} 2nx^{2n} = x\sum_{n=1}^{+\infty} 2nx^{2n-1} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}.$$

(c) On remarque que la série entière associée à cette somme est la série entière primitive de la série entière $\sum x^{2n}$. Par le cours, elle a aussi pour rayon de convergence $R = 1$ et sa somme est l'unique primitive s'annulant en 0 de la fonction somme de $\sum x^{2n}$. Ainsi, pour tout $x \in I$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[-\ln(1-t) + \ln(1+t)\right]_0^x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

(d) Soient $x \in I$ et $N \in \mathbb{N}$, en séparant les termes pairs et impairs dans la somme finie, on trouve

$$\sum_{n=0}^{2N+1} n^{(-1)^n} x^n = \sum_{p=0}^{N} 2p x^{2p} + \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{2p+1} x^{2p+1}.$$

Les trois séries ci-dessus convergeant pour $x \in I$, on peut faire tendre N vers $+\infty$ pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^{(-1)^n} x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} 2p x^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} x^{2p+1} = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Correction de l'exercice 2 :

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Si $t = 0$ ou 1, alors $u_n(t) = 0$ pour tout n donc la série $\sum u_n(t)$ converge. Si $t \notin \{0;1\}$, alors $u_n(t) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\frac{|u_{n+1}(t)|}{|u_n(t)|} = \frac{t^{n+1}\,|\ln(t)|}{n+1}\,\frac{n}{t^n\,|\ln(t)|} = t\frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} t.$$

Par la règle de D'Alembert pour les séries numériques, si $t > 1$, la série $\sum |u_n(t)|$ diverge grossièrement donc il en est de même de la série $\sum u_n(t)$. Si $t < 1$, la série $\sum |u_n(t)|$ converge, ce qui entraîne la convergence de la série $\sum u_n(t)$. Ainsi, le domaine de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est $[0;1]$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction u_n est dérivable sur $]0;1]$, et pour tout $t \in]0;1]$,

$$u_n'(t) = \frac{1}{n}\left(n t^{n-1}\ln t + \frac{t^n}{t}\right) = \frac{t^{n-1}}{n}(n\ln(t) + 1)$$

qui est du signe de $n\ln(t) + 1$. Or par croissance de ln et exp sur $]0;1]$,

$$n\ln t + 1 \geq 0 \iff \ln t \geq -\frac{1}{n} \iff t \geq e^{-1/n}.$$

Ainsi, la fonction u_n est décroissante sur $]0; e^{-1/n}]$ puis croissante sur $[e^{-1/n}; 1]$ (et vaut 0 en 0 et en 1).

(b) Par le tableau de variations précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est bornée sur $[0;1]$ et est à valeurs négatives. Ainsi, $|u_n| = -u_n$ a des variations inverses de celles de u_n. Puisque de plus $u_n(0) = 0$, on trouve

$$\|u_n\|_{\infty;[0;1]} = \sup_{t\in[0;1]} |u_n(t)| = \sup_{t\in]0;1]} -u_n(t) = -u_n(e^{-1/n}) = \frac{e^{-1}}{n^2}.$$

Puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, il en est de même de la série numérique $\sum \|u_n\|_{\infty;[0;1]}$, ce qui prouve la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0;1]$.

3. (a) Par produit de fonctions continues, u_n est continue sur $]0;1]$. De plus, par croissances comparées (puisque $n \geq 1$), $\lim\limits_{t\to 0} u_n(t) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^n \ln(t)}{n} = 0 = u_n(0)$, ce qui démontre la continuité de u_n en 0, donc a fortiori sur $[0;1]$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $[0;1]$. De plus, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0;1]$. La convergence uniforme préservant la continuité, on en déduit que la fonction somme S est continue sur $[0;1]$.

(c) On sait que pour tout $u \in]-1;1[$, $-\ln(1-u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$. Ainsi, pour tout $t \in]0;1[$,

$$S(t) = \ln(t) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(t)\ln(1-t).$$

Pour $t \in \{0;1\}$, on a vu que $u_n(t) = 0$ pour tout n, donc $S(t) = 0$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, par une intégration par parties généralisées avec les fonctions $t \longmapsto \frac{t^{n+1}}{n+1}$ et ln,

$$\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left(\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{n}\left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{n(n+1)^2}.$$

où l'on a encore utilisé les croissances comparées pour obtenir $\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_0^1 = 0$.

(b) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur le segment $[0;1]$, et que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0;1]$, on peut utiliser le théorème d'interversion série/intégrale (dans le cas où le domaine d'intégration est un segment) :

$$I = \int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 S(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}.$$

(c) La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $F(X) = \frac{1}{X(X+1)^2}$ est de la forme $F(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. En évaluant $XF(X)$ en 0, il vient $a = 1$, puis en évaluant $(X+1)^2F(X)$ en -1, on trouve $b = -1$ et enfin, en étudiant la limite de $xF(x)$ lorsque $x \to +\infty$, on trouve $0 = a + b$ d'où $b = -1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{car les deux séries convergent} \\ &= \lim_{N\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) - \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 1\right) \quad \text{par télescopage} \\ &= 2 - \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3 :

1. Tout d'abord, puisqu'une fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment, N est bien définie sur E, et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par sa construction. Soit $f \in E$, par somme nulle de termes positifs, on a

$$N(f) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} |f(1)| = 0 \\ \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} |f(1)| = 0 \\ \forall t \in [0;1], \quad |f(t)| = 0 \end{array}\right. \iff f = 0_E$$

où la deuxième équivalence s'obtient car f est continue et à valeurs positives.

Soient $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale et homogénéité de la valeur absolue, on a

$$N(\lambda f) = |\lambda|\,|f(1)| + \int_0^1 |\lambda|\,|f(t)|\,\mathrm{d}t = |\lambda|\,N(f).$$

Soient $f, g \in E$, alors par inégalité triangulaire pour la valeur absolue, on a pour tout $t \in [0;1]$, $|f(t)+g(t)| \leq |f(t)|+|g(t)|$ d'où par croissance de l'intégrale :

$$N(f+g) = |f(1)+g(1)| + \int_0^1 |f(t)+g(t)| \, \mathrm{d}t \leq |f(1)|+|g(1)| + \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t + \int_0^1 |g(t)| \, \mathrm{d}t \leq N(f)+N(g)$$

ce qui achève de démontrer que N est une norme sur E.

2. (a) Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in [0;1]$,

$$u(\lambda f+g)(x) = (\lambda f+g)(x) - (\lambda f+g)(0) = \lambda u(f)(x) + u(g)(x) = (\lambda u(f)+u(g))(x)$$

ce qui entraîne que $u(\lambda f+g) = \lambda u(f)+u(g)$ et démontre la linéarité de u.

(b) Soit $f \in E$, alors pour tout $x \in [0;1]$, on a

$$|u(f)(x)| = |f(x)-f(0)| \leq |f(x)|+|f(0)| \leq 2\|f\|_\infty.$$

Ainsi, $2\|f\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble $\{|u(f)(x)| \mid x \in [0;1]\}$, donc il est inférieur à la borne supérieure de cet ensemble (qui est le plus petit des majorants de l'ensemble). On en déduit que

$$\forall f \in E, \quad \|u(f)\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$$

ce qui entraîne la continuité de l'application linéaire u (pour E muni de $\| \ \|_\infty$) par l'une des caractérisations équivalentes du cours (on peut aussi en déduire que la norme subordonnée de u est alors inférieure ou égale à 2).

(c) i. Soit $n \geq 2$, alors

$$N(f_n - 0_E) = N(f_n) = |0| + \int_0^{\frac{2}{n}} \left(1 - \frac{n}{2}x\right) \mathrm{d}x = \left[x - \frac{nx^2}{4}\right]_0^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui démontre que la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ converge vers 0 dans (E, N).

ii. Soit $n \geq 2$, alors

$$\begin{aligned}
N(u(f_n)) &= |f_n(1)-f_n(0)| + \int_0^1 |f_n(x)-f_n(0)| \, \mathrm{d}x \\
&= 1 + \int_0^{\frac{2}{n}} \left|1 - \frac{n}{2}x - 1\right| \mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{n}}^1 |-1| \, \mathrm{d}x \\
&= 1 + \int_0^{\frac{2}{n}} \frac{n}{2}x \, \mathrm{d}x + 1 - \frac{2}{n} \\
&= 2 - \frac{2}{n} + \left[\frac{nx^2}{4}\right]_0^{\frac{2}{n}} \\
&= 2 - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

iii. D'après le calcul précédent, on remarque que $N(u(f_n)) = N(u(f_n) - 0_E) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2 \neq 0$. Ainsi, la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ converge vers 0_E pour N alors que $(u(f_n))_{n\geq 2}$ ne converge pas vers $0_E = u(0_E)$ pour N, ce qui contredit la caractérisation séquentielle de la continuité de u en 0_E. Par suite, u n'est pas continue (sur E) lorsque E est muni de la norme N.

3. Puisque la notion de continuité est invariante par passage à une norme équivalente, et que l'on vient de voir que u est continue pour $\| \ \|_\infty$ mais pas pour N, les normes N et $\| \ \|_\infty$ ne peuvent pas être équivalentes.

Correction de l'exercice 4 :

1. • L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ étant de dimension finie, toutes les normes sur $\mathbb{R}^2$ sont deux à deux équivalentes. Les notions d'ouverts et fermés étant invariantes par passage à une norme équivalente, on peut donc choisir la norme que l'on souhaite pour l'étude. Prenons par exemple, pour $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|X\|_\infty = \max(|x|, |y|)$.
   • Le point $(0, 1)$ appartient à l'ensemble A. Pour tout $r > 0$, le point $\left(0, 1 + \frac{r}{2}\right)$ appartient à la boule ouverte de centre $(0, 1)$ et de rayon r puisque $\|\left(0, 1 + \frac{r}{2}\right) - (0, 1)\|_\infty = \|\left(0, \frac{r}{2}\right)\|_\infty = \frac{r}{2} < r$, et n'appartient pas à A puisque $1 + \frac{r}{2} \neq \cos(0) = 1$. Ainsi,
$$\exists X = (0, 1) \in A, \quad \forall r > 0, \quad B(X, r) \not\subset A$$
   ce qui démontre que A n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   • Considérons la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $X_n = \left(0, \frac{1}{4} - \frac{1}{4n}\right)$. Alors,
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 3 \times 0^2 + 4\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \in]-1; 1[\quad \text{donc} \quad X_n \in B$$
   et par caractérisation de la limite dans un espace produit,
$$X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left(0, \frac{1}{4}\right) \quad \text{avec} \quad \left(0, \frac{1}{4}\right) \notin B \text{ puisque } 3 \times 0^2 + 4\frac{1}{4} = 1.$$
   Ainsi, on a trouvé une suite d'éléments de B qui converge vers un élément n'appartenant pas à B, ce qui démontre que B n'est pas un fermé de $\mathbb{R}^2$.

2. (a) On se place dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = [n; +\infty[$, F_n est un fermé de $\mathbb{R}$ et $F_{n+1} = [n+1; +\infty[\subset [n; +\infty[$, donc la suite $(F_n)_n$ satisfait les conditions de l'énoncé. De plus, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n; +\infty[= \emptyset$ puisque s'il existait un élément $x \in \mathbb{R}$ dans cette intersection, on devrait avoir $x \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui est absurde.
   (b) Puisque la suite $(F_n)_n$ est décroissante pour l'inclusion, une récurrence immédiate entraîne que $F_n \subset F_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, la suite $(x_n)_n$ est une suite d'éléments du compact F_0. Par définition d'un compact, il existe donc une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément noté x appartenant à F_0.
   (c) i. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\varphi(n) \geq n$, ce qui entraînera bien en particulier que $\forall n \geq p$, $\varphi(n) \geq p$. Puisque φ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\varphi(0) \geq 0$, la propriété est donc vraie au rang $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\varphi(n) \geq n$. Puisque $n + 1 > n$, la stricte croissance de φ entraîne $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$ d'où $\varphi(n+1) \geq n + 1$ puisque φ est à valeurs entières. Par le principe de récurrence, on en déduit que $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
      ii. Pour tout $n \geq p$, l'élément $x_{\varphi(n)}$ appartient à $F_{\varphi(n)} \subset F_p$ puisque $\varphi(n) \geq p$ par la question précédente. Ainsi, la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geq p}$ est une suite du compact F_p, qui converge vers x. Un compact étant en particulier fermé, on en conclut que la limite x appartient aussi à F_p. Ceci étant valable pour tout $p \in \mathbb{N}$, on en déduit que $x \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} F_p = F$ donc $F \neq \emptyset$.