Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2015-2016

Maths IV PMI - Analyse

Correction de l'examen du 6 juin 2016

Correction de l'exercice 1 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $u_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

1. Soit $x \in]0; +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n u_n(x) \geq 0$ donc la série $\sum u_n(x)$ est une série alternée. De plus, la suite $(|u_n|)_n = \left(\frac{1}{n+x}\right)_n$ est décroissante et converge vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum u_n(x)$ converge, ce qui démontre la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $]0; +\infty[$.
2. On sait que la convergence normale entraîne la convergence absolue simple. Or pour $x \in]0; +\infty[$, $|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum |u_n(x)|$ diverge. Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $]0; +\infty[$ (en fait on a même prouvé qu'elle ne converge normalement sur aucune partie $A \subset]0; +\infty[$ non vide).
3. On a déjà vu que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$. Soit $x \in]0; +\infty[$. Puisque la série numérique $\sum u_n(x)$ vérifie le critère des séries alternées, son reste d'ordre n (noté $R_n(x)$) vérifie :

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}.$$

En particulier, la fonction R_n est bornée sur $]0; +\infty[$ et sa borne supérieure vérifie

$$0 \leq \|R_n\|_{\infty,]0;+\infty[} \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ce qui démontre la convergence uniforme de la suite de fonctions $(R_n)_n$ sur $]0; +\infty[$ vers la fonction nulle. Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $]0; +\infty[$.
4. On a :
   - la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$,
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x > 0$, $u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$,
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x > 0$,

$$|u_n'(x)| = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

   ce qui prouve que u_n' est bornée sur $]0; +\infty[$ et $\|u_n'\|_{\infty,]0;+\infty[} \leq \frac{1}{n^2}$. Par comparaison à une série de Riemann (positive) d'exposant $2 > 1$, la série $\sum \|u_n'\|_{\infty,]0;+\infty[}$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement donc uniformément sur $]0; +\infty[$.

   D'après le théorème de dérivation pour les séries de fonctions, la fonction somme S est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

5. Soit $x \in]0;+\infty[$,

$$\begin{aligned} S(x)+S(x+1) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+x} \text{ par changement d'indice} \\ &= \frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+x} \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

6. Lorsque $x \to 0^+$, par continuité de S en 1 (car S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$), $S(x+1) \to S(1) \in \mathbb{R}$. Par l'égalité précédente, on obtient donc pour $x \to 0^+$:

$$xS(x) = 1 - xS(x+1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1 \quad \text{d'où} \quad S(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Correction de l'exercice 2 :

1. La restriction de f à $]-\pi;\pi[$ est donnée par $t \longmapsto \operatorname{sh}(\lambda t)$ qui admet un prolongement continu (même de classe $\mathcal{C}^1$) sur $[-\pi;\pi]$ (à savoir $t \longmapsto \operatorname{sh}(\lambda t)$). Ainsi f est continue par morceaux (même de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur $[-\pi;\pi]$. Par 2π-périodicité, elle est continue par morceaux (même $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur $\mathbb{R}$.

   On peut donc calculer ses coefficients de Fourier exponentiels. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sh}(\lambda t)e^{-int}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\pi}^{\pi}\left(e^{(\lambda-in)t}-e^{-(\lambda+in)t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{(\lambda-in)t}}{\lambda-in}+\frac{e^{-(\lambda+in)t}}{\lambda+in}\right]_{-\pi}^{\pi} \quad \text{car } \lambda\in]0;+\infty[\text{ donc } \lambda\pm in\neq 0 \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{(-1)^n(e^{\lambda\pi}-e^{-\lambda\pi})}{\lambda-in}+\frac{(-1)^n(e^{-\lambda\pi}-e^{\lambda\pi})}{\lambda+in}\right) \\ &= \frac{(-1)^n\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{2\pi}\left(\frac{1}{\lambda-in}-\frac{1}{\lambda+in}\right) \\ &= \frac{(-1)^n in\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi(\lambda^2+n^2)}. \end{aligned}$$

2. Puisque la fonction sh est impaire et $f(\pi) = 0 = -f(-\pi)$, la fonction f est impaire. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$. Par la formule du cours, pour $n \in \mathbb{N}$, $c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f))$ d'où

$$b_n(f) = 2ic_n(f) = \frac{(-1)^{n+1}2n\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi(\lambda^2+n^2)}.$$

   Ainsi, la série de Fourier de f n formulation réelle est

$$\frac{a_0(f)}{2}C_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(a_n(f)C_n + b_n(f)T_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^{n+1}2n\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi(\lambda^2+n^2)}T_n$$

   où $C_n : t \longmapsto \cos(nt)$ et $T_n : t \longmapsto \sin(nt)$.

3. On a déjà vu que la fonction f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée de f, notée $\widetilde{f} : t \longmapsto \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$. Or f est continue sur $]-\pi;\pi[$ donc par 2π-périodicité sur $\mathbb{R}\backslash\{\pi+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. Par suite, f est égale à $\widetilde{f}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{\pi+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. De plus, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widetilde{f}(\pi+2k\pi) = \widetilde{f}(\pi) = \frac{\operatorname{sh}(-\lambda\pi)+\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{2} = 0 = f(\pi)$$

ce qui démontre que f est égale à sa régularisée. En particulier, f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.

4. On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi(\lambda^2 + n^2)} \sin(nx).$$

En évaluant ceci en $x = \dfrac{\pi}{2}$, et en remarquant que $\sin(n\pi/2) = 0$ si n est pair, et $\sin((2p+1)\pi/2) = (-1)^p$ pour $p \in \mathbb{N}$, on obtient

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2p+2} 2(2p+1) \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi(\lambda^2 + (2p+1)^2)} \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 2(2p+1) \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi(\lambda^2 + (2p+1)^2)}$$

d'où

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p (2p+1)}{\lambda^2 + (2p+1)^2} = \frac{\pi}{2 \operatorname{sh}(\lambda\pi)} \operatorname{sh}\left(\lambda\frac{\pi}{2}\right).$$

5. Comme la fonction f est continue par morceaux et 2π-périodique, le théorème de Parseval entraîne

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2 \operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2(\lambda^2 + n^2)^2}$$

avec

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sh}(\lambda t)|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{8\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{2\lambda t} - 2 + e^{-2\lambda t})\mathrm{d}t = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{\operatorname{sh}(2\lambda t)}{\lambda} - 2t\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\operatorname{sh}(2\lambda\pi)}{4\pi\lambda} - \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(\lambda^2 + n^2)^2} = \frac{\pi^2}{2 \operatorname{sh}^2(\lambda\pi)} \frac{\operatorname{sh}(2\lambda\pi)}{4\pi\lambda} - \frac{1}{2} = \frac{\pi \operatorname{sh}(2\lambda\pi)}{8\lambda \operatorname{sh}^2(\lambda\pi)} - \frac{\pi^2}{4 \operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}.$$

Correction de l'exercice 3 **:** Pour x réel, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} \mathrm{d}t.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $g : t \in]0; +\infty[\longmapsto e^{-t} \dfrac{1 - \cos(tx)}{t^2}$. La fonction g est continue sur $]0; +\infty[$, donc intégrable sur tout segment inclus dans $]0; +\infty[$. Lorsque $t \to +\infty$,

$$t^2 g(t) = (1 - \cos(tx))e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{puisque } |1 - \cos(tx)| \leq 2)$$

ainsi $g(t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ quand $t \to +\infty$. Puisque la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$, il en est de même de g par comparaison à une fonction positive.

De plus, lorsque $t \to 0$,

$$1 - \cos(tx) = 1 - \left(1 - \frac{t^2 x^2}{2!} + o(t^2)\right) \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} = \frac{x^2}{2} + o(1).$$

La fonction g tend vers $\dfrac{x^2}{2}$ en 0, elle est donc prolongeable par continuité en 0. Par conséquent, elle est intégrable sur $]0; 1]$. La fonction g étant intégrable sur $]0; +\infty[$, l'intégrale définissant $F(x)$ converge, ce qui démontre que F est bien définie en x, ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Puisque $\cos(u) \in [-1; 1]$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, il est clair que $0 \leq 1 - \cos(u)$. Pour l'autre inégalité :

- On peut procéder simplement par double dérivation : posons $h : u \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{u^2}{2} - 1 + \cos(u)$. La fonction h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad h'(u) = u - \sin(u) \quad \text{ et } \quad h''(u) = 1 - \cos(u).$$

  Par suite, $h''(u) \geq 0$ pour tout u donc la fonction h' est croissante. Or $h'(0) = 0$ donc h' est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$, ce qui démontre la décroissance de h sur $\mathbb{R}_-$ et sa croissance sur $\mathbb{R}^+$. Comme $h(0) = 0$, il s'ensuit que $h(u) \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ ce qui donne l'autre inégalité demandée.

- On peut aussi utiliser la formule de Taylor Lagrange. La fonction cos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $u \neq 0$, on peut lui appliquer la formule de Taylor Lagrange entre 0 et u à l'ordre 2. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos(u) = \cos(0) + \cos'(0)u + \frac{\cos''(c)u^2}{2} = 1 - \cos(c)\frac{u^2}{2}$$

  d'où

$$1 - \cos(u) = \cos(c)\frac{u^2}{2} \leq \frac{u^2}{2} \quad \text{ puisque } \cos(c) \leq 1 \text{ et } \frac{u^2}{2} \geq 0$$

  (l'inégalité étant triviale lorsque $u = 0$).

3. Posons

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & e^{-t}\dfrac{1-\cos(tx)}{t^2} \end{array}$$

de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(x,t)\mathrm{d}t$. Soit $a > 0$.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}\times]0;+\infty[$ comme produit de la composée de $u \longmapsto \dfrac{e^{-u}}{u^2}$ continue sur $]0;+\infty[$ avec la fonction polynomiale $(x,t) \longmapsto t$ et de la composée de la fonction réelle $u \longmapsto 1 - \cos(u)$ continue sur $\mathbb{R}$ avec la fonction polynomiale $(x,t) \longmapsto xt$ continue sur $\mathbb{R}^2$.

- Pour tout $(x,t) \in [-a;a]\times]0;+\infty[$, on a par la question 2

$$|f(x,t)| = e^{-t}\frac{1-\cos(xt)}{t^2} \leq e^{-t}\frac{x^2t^2}{2t^2} \leq \frac{a^2}{2}e^{-t}.$$

  La fonction $\varphi : t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto \dfrac{a^2}{2}e^{-t}$ est continue (donc cntinue par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs positives, et vérifie $\displaystyle\int_0^X \varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}(1 - e^{-X}) \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \in \mathbb{R}^+$ ce qui montre que φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

D'après le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres, la (restriction de la) fonction F est continue sur $[-a;a]$, ceci pour tout $a > 0$.

4. Soit $a > 0$.

- On a déjà vu que f est continue sur $\mathbb{R}\times]0;+\infty[$ et vérifie l'hypothèse de domination.

- De plus, la fonction f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable donnée par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0;+\infty[, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-t}\frac{\sin(tx)}{t}$$

  qui est aussi continue sur $\mathbb{R}\times]0;+\infty[$.

- Enfin, en utilisant l'inégalité rappelée en début d'énoncé, on obtient pour tout $(x,t) \in [-a;a]\times]0;+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-t}\frac{|\sin(tx)|}{t} \leq e^{-t}\frac{|x|\,t}{t} \leq ae^{-t}.$$

  La fonction $\psi : t \in]0;+\infty[\longmapsto ae^{-t}$ est continue et intégrable sur $]0;+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètres, la (restriction de la) fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a;a]$ et pour tout $x \in [-a;a]$, $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

- On cherche alors à appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres sur la fonction F', sachant que les deux premières hypothèses sont déjà vérifiées. La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable donnée par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0;+\infty[, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = e^{-t}\cos(tx)$$

  qui est continue sur $\mathbb{R}\times]0;+\infty[$.

- Finalement, pour tout $(x,t) \in [-a;a]\times]0;+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| = e^{-t}\left|\cos(tx)\right| \leq e^{-t}$$

  avec $\chi : t \in]0;+\infty[\longmapsto e^{-t}$ continue et intégrable sur $]0;+\infty[$.

D'arès le théorème de dérivation, la fonction F' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a;a]$ pour tout $a > 0$, donc a fortiori sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\mathrm{d}t.$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
F''(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{e^{itx}+e^{-itx}}{2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(e^{(-1+ix)t} + e^{-(1+ix)t}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{(-1+ix)t}}{-1+ix} - \frac{e^{-(1+ix)t}}{1+ix}\right]_0^{+\infty} \quad \text{car } -1 \pm ix \neq 0 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix}\right) \quad \text{car } \lim_{t\to+\infty} e^{(-1\pm ix)t} = 0 \\
&= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

6. On en déduit par intégration qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = \arctan(x) + \lambda$, or

$$F'(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin(0)}{t}\mathrm{d}t = 0$$

donc $F'(x) = \arctan(x)$. De même, puisque $F(0) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve par intégration par parties avec les fonctions $u : t \longmapsto t$ et $v : t \longmapsto \arctan t$ (justifiée car les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$\begin{aligned}
F(x) &= F(0) + \int_0^x \arctan(t)\mathrm{d}t \\
&= [t\arctan(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^x \\
&= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).
\end{aligned}$$