Correction de l'examen du 3 juin 2015

Correction de l'exercice 1 **:**

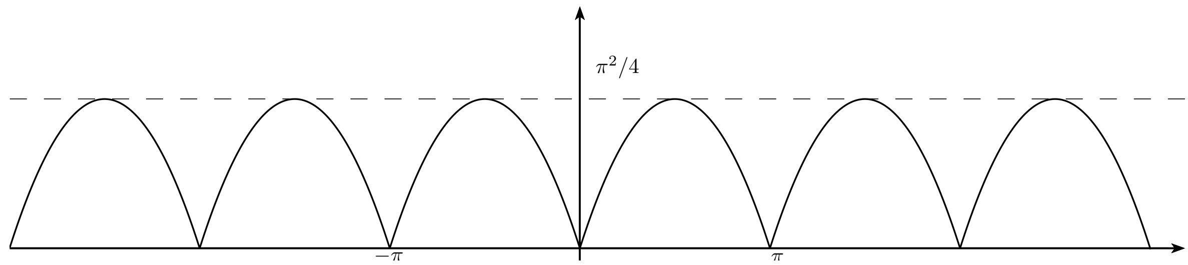
1. 

Figure 1 – Graphe de la fonction f sur $[-3\pi; 3\pi]$

2. Remarquons que la fonction est paire : par parité de la valeur absolue, $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in]-\pi;\pi[$. De plus, par 2π-périodicité, $f(-\pi) = f(-\pi + 2\pi) = f(\pi)$ ce qui entraîne la parité de f sur $\mathbb{R}$.
   - La fonction f est 2π-périodique.
   - La restriction de f à $]0;\pi[$ est donnée par $x \longmapsto x(\pi - x)$ qui admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0;\pi]$. Par parité, f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[-\pi;\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.
   - Par construction, la fonction f est continue sur $]-\pi;\pi[$. De plus, $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = 0 = f(\pi) = \lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)$, ainsi la fonction f est aussi continue en π. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

   D'après le théorème de convergence normale, la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. En particulier, f est partout égale à la somme de sa série de Fourier.

3. Puisque f est paire, ses coefficients de Fourier trigonométriques vérifient : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n(f) = 0$ et pour $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos(nx)\mathrm{d}x \text{ par parité de } x \longmapsto f(x)\cos(nx) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x(\pi-x)}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right) \text{ par intégration par parties} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{(\pi-2x)\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n^2}\int_0^{\pi}\cos(nx)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2\left((-1)^{n+1} - 1\right)}{n^2} \\
&= \begin{cases} -\dfrac{1}{p^2} & \text{si } n = 2p \text{ avec } p \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si n impair.} \end{cases}
\end{aligned}$$

   Enfin,

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

   Ainsi, la série de Fourier de f en formulation réelle est

$$\frac{a_n(f)}{2}C_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(a_n(f)C_n + b_n(f)T_n) = \frac{\pi^2}{6}C_0 - \sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p^2}C_{2p}$$

où $C_n : x \longmapsto \cos(nx)$ et $T_n : x \longmapsto \sin(nx)$.

Pour obtenir la série de Fourier de f en formulation complexe, on peut utiliser les formules de cours : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n^2} \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} = \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n^2}, \quad \text{et} \quad c_0(f) = \frac{a_0(f)}{2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Par conséquent, la série de Fourier de f en formulation complexe est :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n = \frac{\pi^2}{6} e_0 - \sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2p^2} \left(e_{2p} + e_{-2p} \right) \text{ où } e_n : x \longmapsto e^{inx}.$$

4. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc en particulier continue par morceaux, et 2π-périodique. Par le théorème de Dirichlet, on obtient alors

$$\|f\|_2^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(f)|_2 + |b_n(f)|^2) = \frac{\pi^4}{36} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4}$$

où

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 (\pi - x)^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{3} x^3 - \frac{\pi}{2} x^4 + \frac{1}{5} x^5 \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{30}$$

ce qui donne finalement

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} = 2 \left(\frac{\pi^4}{30} - \frac{\pi^4}{36} \right) = \frac{\pi^4}{90}.$$

On a vu que f coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la somme de sa série de Fourier. En particulier en 0, cette égalité se traduit par :

$$0 = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \quad \text{d'où} \quad \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Correction de l'exercice 2 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 1$. Ainsi, la suite $(f_n(0))_n$ ne tend pas vers 0 donc la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(0)$ diverge grossièrement.

2. La série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$ puisque la série numérique $\sum f_n(0)$ diverge (et $0 \in \mathbb{R}$). Soit $x \in \mathbb{R}^*$, alors on a l'équivalent

$$f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{nx^2}.$$

Puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$), la série numérique $\sum f_n(x)$ converge aussi par comparaison de séries à termes positifs. Ainsi, $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^*$.

3. Soit $a > 0$, on note $I_a =]-\infty; a[\cup]a; +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in I_a$, on a par parité et croissance de $t \longmapsto n^2 t^2$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$|f_n(x)| = \frac{1}{1 + n^2 x^2} \leq \frac{1}{1 + n^2 a^2} = f_n(a).$$

Ainsi, la fonction f_n est bornée et puisque la borne supérieure est le plus petit des majorants, il vient

$$\|f_n\|_{\infty, I_a} = \sup_{x \in I_a} |f_n(x)| \leq \frac{1}{1 + n^2 a^2} = f_n(a).$$

Par l'étude de la convergence simple, puisque $a \neq 0$, la série $\sum f_n(a)$ converge, ce qui entraîne la convergence de la série à termes positifs $\sum \|f_n\|_{\infty, I_a}$. Ainsi, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I_a.

4. On considère la fonction S définie pour tout $x \in]0;+\infty[$ par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$.

   (a) Méthode 1 :

   - L'ensemble $]1;+\infty[$ n'est pas majoré.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n admet une limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.
   - La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I_1 donc sur $]1;+\infty[$, ce qui entraîne sa convergence uniforme sur $]1;+\infty[$.

   D'après le théorème d'échange limite/série, la fonction S admet une limite lorsque $x \to +\infty$ et

   $$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

   Méthode 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\dfrac{1}{1+n^2x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{n^2}$ d'où

   $$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2x^2} \leq \frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$$

   puisque la série à termes positifs $\sum \dfrac{1}{k^2}$ converge. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ (puisque la série définissant $S(x)$ converge), on trouve alors

   $$0 \leq S(x) \leq \frac{1}{x^2}\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}}_{\in\mathbb{R}^+} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   ce qui démontre que $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

   (b) i. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ ce qui entraîne que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(0) = +\infty$.

   ii. Soit $x \in]0;+\infty[$, puisque $f_n(x) \geq 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) \leq S(x)$.

   iii. Soient $x, y \in]0;+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est décroissante sur $]0;+\infty[$, d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \geq \sum_{k=1}^{n} f_k(y)$.
   En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, puisque les séries intervenant sont convergentes, il vient : $S(x) \geq S(y)$ ce qui démontre la décroissance de la fonction S sur $]0;+\infty[$.

   D'après le théorème de la limite monotone, la fonction S admet une limite à droite en 0 (éventuellement infinie). Puisque de plus $S(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$, cela démontre l'existence de $\ell = \lim\limits_{x\to 0^+} S(x) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

   iv. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$, donc en 0. S_n étant une somme finie de fonctions continues, elle est aussi continue en 0. Par suite, $\lim\limits_{x\to 0} S_n(x) = S_n(0) = n$.
   En passant à la limite lorsque $x \to 0^+$ dans l'inégalité $S_n(x) \leq S(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (puisque les deux limites existent), on obtient : $S_n(0) \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En passant alors à la limite quand $n \to +\infty$, on trouve finalement $\ell = +\infty$.

5. Soit $x > 0$. Posons $g : t \in [0;+\infty[\longmapsto \dfrac{1}{1+t^2x^2}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^+$, décroissante. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [k;k+1]$, on a $g(k+1) \leq g(t) \leq g(k)$ d'où en intégrant ceci sur $[k;k+1]$:

   $$g(k+1) = \int_k^{k+1} g(t)\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} g(t)\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} g(k)\mathrm{d}t = g(k).$$

En sommant l'inégalité de droite de k allant de 1 à n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) et l'inégalité de gauche pour k allant de 0 à $n-1$, on trouve :

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} g(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} g(k) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} g(k+1) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k}^{k+1} g(t)\mathrm{d}t$$

ce qui donne grâce à la relation de Chasles :

$$\int_{1}^{n+1} g(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} g(k) \leq \int_{0}^{n} g(t)\mathrm{d}t \qquad (*).$$

Or pour $a, b \in \mathbb{R}^+$, par le changement de variable $u = xt$,

$$\int_{a}^{b} g(t)\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} \frac{1}{1+(tx)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_{ax}^{bx} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\left(\arctan(bx) - \arctan(ax)\right).$$

Ainsi, en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans $(*)$:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) \leq S(x) \leq \frac{\pi}{2x}.$$

Finalement, on trouve l'encadrement

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \leq xS(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

et le théorème des gendarmes entraîne $\lim\limits_{x \to 0^+} xS(x) = \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 3 :

1. La fonction $f : (x,t) \in [\alpha;\beta] \times [a;b] \longrightarrow f(x,t)$ est continue sur $[\alpha;\beta] \times [a;b]$. D'après le théorème de continuité pour les intégrales à paramètres dans le cas où le domaine d'intégration est un segment, les fonctions f_1 et f_2 sont continues respectivement sur $[\alpha;\beta]$ et $[a;b]$.

2. (a) Soit $x \in [\alpha;\beta]$, on a $\varphi(x,a) = \int_{a}^{a} f(x,t)\mathrm{d}t = 0$ et $G(a) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x,a)\mathrm{d}x = 0$.

   (b) Soit $x \in [\alpha;\beta]$. La fonction $y \in [a;b] \longmapsto \int_{a}^{y} f(x,t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de la fonction continue sur $[a;b]$ $y \longmapsto f(x,y)$ qui s'annule en a. Par le théorème fondamental de l'intégration, elle est dérivable sur $[a;b]$ de dérivée $y \longmapsto f(x,y)$, ce qui démontre l'existence de la dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sur $[\alpha;\beta] \times [a;b]$ et

   $$\forall (x,y) \in [\alpha;\beta] \times [a;b], \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = f(x,y).$$

   En d'autres termes, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = f$ ce qui entraîne sa continuité sur $[\alpha;\beta] \times [a;b]$.

   (c) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ (d'intérieur non vide), $[c;d]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $h : I \times [c;d] \longrightarrow \mathbb{C}$. Si h est continue sur $I \times [c;d]$ et admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable $\frac{\partial h}{\partial x}$ elle-aussi continue sur $I \times [c;d]$, alors la fonction $H : x \in I \longmapsto \int_{c}^{d} h(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. De plus, pour tout $x \in I$, $H'(x) = \int_{c}^{d} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

   (d) Puisque $G : y \in [a;b] \longmapsto \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x,y)\mathrm{d}y$ et que la fonction φ admet une dérivée partielle par rapport à y, continue sur $[\alpha;\beta] \times [a;b]$, il nous reste à prouver la continuité de φ afin de pouvoir appliquer le théorème de dérivation. Par le théorème de continuité sur un segment, pour tout $y \in [a;b]$, la fonction

$\psi_y : x \longmapsto \displaystyle\int_a^y f(x,t)\mathrm{d}t$ est continue sur $[\alpha;\beta]$. Soit $(x_0,y_0) \in [\alpha;\beta]\times[a;b]$. Pour $(x,y)\in[\alpha;\beta]\times[a;b]$, on a

$$\begin{aligned}
|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)| &= \left|\int_a^y f(x,t)\mathrm{d}t - \int_a^{y_0} f(x_0,t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \left|\int_a^{y_0} f(x,t)\mathrm{d}t - \int_a^{y_0} f(x_0,t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{y_0}^{y} f(x,t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq |\psi_{y_0}(x)-\psi_{y_0}(x_0)| + M\,|y_0-y|
\end{aligned}$$

puisque f est continue sur le compact $[\alpha;\beta]\times[a;b]$ donc bornée par une certaine constante $M>0$. Soit $\varepsilon>0$, par continuité de la fonction ψ_{y_0}, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x\in[\alpha;\beta]$ vérifiant $|x-x_0|\leq\eta$, on a $|\psi_{y_0}(x)-\psi_{y_0}(x_0)|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$. Posons $\eta' = \min\left(\eta,\dfrac{\varepsilon}{2M}\right)$. Pour tout $(x,y)\in[\alpha;\beta]\times[a;b]$ tel que $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty\leq\eta'$, on obtient alors

$$|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + M\frac{\varepsilon}{2M} \leq \varepsilon$$

ce qui démontre la continuité de φ sur $[\alpha;\beta]$. D'après le théorème de dérivation pour les intégrales à paramètres définies sur un segment, il s'ensuit que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ et vérifie

$$\forall y\in[a;b],\quad G'(y) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(e) Puisque G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$, on a en particulier (puisque $G(a)=0$)

$$G(b) = G(a) + \int_a^b G'(y)\mathrm{d}y = \int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

(f) D'après la définition de G, on a aussi $G(b) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi(x,b)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$

(g) En égalant les deux expressions de $G(b)$ trouvées dans les questions précédentes, on retrouve le théorème de Fubini sur un pavé : si $f:[\alpha;\beta]\times[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est continue, alors

$$\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$