Correction de la partie algèbre du devoir 3 du 26/03

Correction de l'exercice 1 :

1. La base β étant orthonormée, l'endomorphisme u est orthogonal si, et seulement si, $\mathrm{Mat}_\beta(u)$ est une matrice orthogonale, c'est-à-dire si, et seulement si, ${}^tAA = I_3$ (la matrice identité).

On est donc amené à calculer :

$$\begin{aligned}
{}^tAA &= \frac{-1}{3}\,{}^t\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \\
&= I_3.
\end{aligned}$$

L'endomorphisme $\boxed{u \text{ est donc orthogonal}}$.

2. Soit v un endomorphisme orthogonal de E, qui est euclidien non orienté de dimension 3. Alors v est soit de déterminant 1, soit de déterminant -1.

$\diamond$ Dans le cas où $\det(v) = 1$, alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, ainsi qu'un nombre réel θ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ (v est une rotation axiale).}$$

En fait (si $v \neq \mathrm{Id}_E$), dès que l'on a un vecteur $f_1 \in \ker(v - \mathrm{Id}_E) \setminus \{0\}$ et dès que (f_2, f_3) est une base orthonormale de $\ker(v - \mathrm{Id}_E)^\perp$, la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ convient.

$\diamond$ Dans le cas où $\det(v) = -1$, alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E, ainsi qu'un nombre réel θ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

En fait (si $v \neq -\mathrm{Id}_E$), dès que l'on a un vecteur $f_1 \in \ker(v + \mathrm{Id}_E) \setminus \{0\}$ et dès que (f_2, f_3) est une base orthonormale de $\ker(v + \mathrm{Id}_E)^\perp$, la famille $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ convient.

Attention Sans orientation de l'espace E, l'angle θ ne peut être déterminé qu'au signe près, car dans les cas ci-dessus, en écrivant $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$,

$$\mathrm{Mat}_{(f_1,f_3,f_2)}(v) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ 0 & \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix},$$

donc si θ est un angle de rotation, $-\theta$ aussi.

3. $\diamond$ On calcule le déterminant de u :

$$\det(u) = \det\left(\mathrm{Mat}_\beta(u)\right) = \det\left(\frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\right)$$
$$= (\frac{-1}{3})^3 \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\underset{(C_3 \leftarrow C_3 + C_1)}{=} \frac{-1}{27}\det\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\underset{(C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2)}{=} \frac{-1}{27}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\underset{(\text{dév}/L_1)}{=} \frac{-1}{27}(-1)^{1+2}\det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{27}(6.3 - 3.(-3))$$
$$= 1$$

L'endomorphisme u est donc une rotation.

$\diamond$ Pour trouver l'axe de rotation $D = \ker(u - \mathrm{Id}_E)$, on résout $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en les inconnues x, y, $z \in \mathbb{R}$:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + 2z = -3x \\ 2x + 2y + z = -3y \\ x - 2y + 2z = -3z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{cases}$$
$$\underset{(L_3 \leftarrow L_3 - L_1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \\ y = z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ y = z \end{cases}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $\{\alpha(-3, 1, 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Donc l'axe de rotation de u est

$$\boxed{D = \mathrm{Vect}(-3e_1 + e_2 + e_3).}$$

$\diamond$ Il ne reste plus qu'à déterminer l'angle de rotation dans le plan orthogonal à $\mathrm{Vect}(-3e_1 + e_2 + e_3)$. Comme on est dans un espace non orienté, l'angle n'est défini qu'à un signe près. En appelant θ cet angle, on sait que $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(A)$, donc $1 + 2\cos(\theta) = -\frac{2}{3}$, donc $\cos(\theta) = -\frac{5}{6}$, soit

$$\boxed{\theta = \pm\arccos(-\frac{5}{6}) \text{ (modulo } 2\pi).}$$

Correction de l'exercice 2 :

1. Le théorème spectral nous dit qu'il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de u.

2. Notons A la matrice $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est implicitement muni du produit scalaire $\langle X, Y\rangle = {}^tX \cdot Y$)

D'après la version matricielle du théorème spectral, on sait que A, qui est symétrique, est diagonalisable via une matrice de passage orthogonale. Notamment, les espaces propres de A dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont orthogonaux entre eux.

$\diamond$ Commençons par trouver les valeurs propres de A. Pour cela déterminons son polynôme caractéristique P_A :

$$\begin{aligned}
P_A &= \det(A - XI_3) \\
&= \begin{vmatrix} 5-X & -1 & 2 \\ -1 & 5-X & 2 \\ 2 & 2 & 2-X \end{vmatrix} \\
&\underset{(L_1 \leftarrow L_1 - L_2)}{=} \begin{vmatrix} 6-X & -6+X & 0 \\ -1 & 5-X & 2 \\ 2 & 2 & 2-X \end{vmatrix} \\
&\underset{(C_2 \leftarrow C_2 + C_1)}{=} \begin{vmatrix} 6-X & 0 & 0 \\ -1 & 4-X & 2 \\ 2 & 4 & 2-X \end{vmatrix} \\
&\underset{(\text{dév}/L_1)}{=} (-1)^{1+1}(6-X) \begin{vmatrix} 4-X & 2 \\ 4 & 2-X \end{vmatrix} \\
&= (6-X)((4-X)(2-X) - 2.4) \\
&= -(X-6)(8 - 4X - 2X + X^2 - 8) \\
&= -(X-6)(X^2 - 6X) = -X(X-6)^2
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{les valeurs propres de } A \text{ sont } 0 \text{ et } 6}$. Comme A est diagonalisable, les multiplicités des racines dans P_A donnent exactement les dimensions des espaces propres : $\dim\ker(A) = 1$ et $\dim\ker(A - 6I_3) = 2$.

Comme on cherche une patrice de passage orthogonale, il faut et il suffit que l'on ait une base orthonormale (u_1, u_2, u_3) de vecteurs propres de A, car pour trois vecteurs colonnes X_1, X_2, X_3, la matrice dont les colonnes sont les X_i est orthogonale si, et seulement si, la famille (X_1, X_2, X_3) est orthonormale pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Puisque les espaces propres de A sont *orthogonaux entre eux*, si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de $\ker(A)$ et $\mathcal{B}'$ en est une de $\ker(A - 6I_3)$, alors $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ sera une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

$\diamond$ Pour x, y, $z \in \mathbb{R}$, on a les équivalences :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y + 2z = 0 \\ -x + 5y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$
$$\underset{(L_2 \leftarrow L_2 - L_1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5x - y + 2z = 0 \\ -6x + 6y = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y + 2z = 0 \\ x = y \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2z = 0 \\ x = y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x \\ x = y \end{cases}$$

Donc $\ker(A) = \mathrm{Vect}(U_1)$ avec $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, et $\mathcal{B} = (u_1)$ en est une base orthonormée pour $u_1 = \frac{U_1}{\|U_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} U_1$, soit

$$\boxed{u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} \end{pmatrix}.}$$

$\diamond$ Pour déterminer une base de $\ker(A - 6I_3)$, on peut chercher à résoudre le système $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ d'inconnues réelles x, y et z.

Ou on procède comme suit : A étant diagonalisable, $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \ker(A) \oplus \ker(A - 6I_3)$. Mais aussi A est symétrique, donc ses espaces propres sont orthogonaux entre eux ; ici, n'ayant que deux espaces propres, nécessairement $\ker(A - 6I_3) = \ker(A)^{\perp} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid {}^tU_1 \cdot X = 0\}$, donc on a les équivalences :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A - 6I_3) \Leftrightarrow {}^tU_1 \cdot X = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow x + y - 2z = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2z - y \ (*).$$

Ainsi on trouve que (U_2, U_3) est une base de $\ker(A - 6I_3)$ avec $U_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (en prenant $y = 0$ et $z = 1$ dans $(*)$) et $U_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (en prenant $y = 1$ et $z = 0$ dans $(*)$). Il s'agit bien d'une base car visiblement U_2 et U_3 vérifient la condition $(*)$, ils sont linéairement indépendants, et par ailleurs $\dim \ker(A - 6I_3) = 2$.

Pour obtenir une base orthonormale de $\ker(A-6I_3)$, on peut appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la famille (U_2, U_3). Cela nous fournit une base (f_2, f_3) où

$$f_2 = U_2$$

et

$$\begin{aligned} f_3 &= U_3 - \frac{\langle f_2, U_3\rangle}{\langle f_2, f_2\rangle} f_2 \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-2}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On normalise ensuite (f_2, f_3), ce qui nous permet d'obtenir la base orthonormée $\mathcal{B}' = (u_2, u_3)$ de $\ker(A - 6I_3)$ avec $u_2 = \frac{U_2}{\|U_2\|}$ et $u_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = \frac{5.f_3}{\|5f_3\|}$ (on multiplie par 5 pour simplifier le calcul de $\|f_3\|$), soit

$$\boxed{u_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \text{ et}}$$

$$\boxed{u_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{30} \end{pmatrix}.}$$

On pose $Q = (u_1|u_2|u_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \end{pmatrix}$. Alors Q est une matrice orthogonale puisque la famille (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et on a

$$\boxed{{}^tQ \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.}$$

Il ne s'agit que d'un exemple de matrice Q. Avec une autre base orthonormée de $\ker(A - 6I_3)$ on aurait eu une autre matrice qui marcherait tout aussi bien.