Correction DS2-Partie Analyse

Exercice 1

1. a. On a $|a_n|^{\frac{1}{n}} = \sin(\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
Par suite, d'après la règle de Cauchy, $R = +\infty$ et le domaine de convergence de cette série est $D = \mathbb{R}$.

b. Le rayon de convergence et le domaine de convergence de cette série sont les mêmes que ceux de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{2^n n^2} x^{4n} = \sum_{n\geq 1} a_n x^{4n}.$$

Notons ce rayon de convergence R et D son domaine de convergence et notons R_1 le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$.
On sait que $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R_1$ et diverge grossièrement pour tout x tel que $|x| > R_1$.
En posant $X = x^4$ on a donc $\sum_{n\geq 1} a_n X^n = \sum_{n\geq 1} a_n x^{4n}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x^4| = |x|^4 < R_1$ et diverge grossièrement pour tout x tel que $|x^4| > R_1$.
D'où $\sum_{n\geq 1} a_n x^{4n}$ converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < R_1^{\frac{1}{4}}$ et diverge grossièrement pour tout x tel que $|x| > R_1^{\frac{1}{4}}$.
Par suite $R = R_1^{\frac{1}{4}}$.
Calculons R_1. On a $a_n \neq 0$ pour tout $n \geq 2$.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{2^n}{2^{n+1}} \frac{n^2}{(n+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

où on a utilisé le fait que $\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$ et $(n+1)^2 \underset{+\infty}{\sim} n^2$.
Par suite $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{2}$ et donc d'après la règle de D'Alembert $R_1 = 2$.
D'où $R = 2^{\frac{1}{4}}$.

Domaine de convergence D de cette série :
Comme $R = 2^{\frac{1}{4}}$, on a

$$]-2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{4}}[\subset D \subset [-2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{4}}].$$

Il reste à étudier la convergence de $\sum_n a_n x^{4n}$ pour $x_0 = -2^{\frac{1}{4}}$ et $x_1 = 2^{\frac{1}{4}}$. On a pour $i = 0, 1$

$$\sum_{n\geq 1} a_n x_i^{4n} = \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2} \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$$

car $\lim_n n^{\frac{3}{2}} \frac{\ln(n)}{n^2} = \lim_n \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$.
Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann convergente car $3/2 > 1$ alors $\sum_{n\geq 1} a_n x_i^{4n}$ converge pour $i = 0, 1$.
Par suite $D = [-2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{4}}]$.

Rem : On aurait pu dire aussi pour pour $i = 0, 1$, que $\sum_{n\geq 1} a_n x_i^{4n} = \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$ est une série de Bertrand avec $\alpha = 2 > 1$ donc convergente.

c. On a $a_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^n}{3^{n+1}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \underset{n \to +\infty}{\to} \frac{1}{3}.$$

Par suite d'après la règle de D'Alembert, $R = 3$.

Domaine de convergence D de cette série :

Si on note D le domaine de convergence de cette série, comme $R = 3$, on a

$$]-3, 3[\subset D \subset [-3, 3].$$

Il reste à étudier la convergence de $\sum_n a_n x^n$ pour $x_0 = -3$ et $x_1 = 3$.

Pour $x_1 = 3$, on a $\sum_n a_n x_1^n = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série divergente.

Pour $x_0 = -3$, on a $\sum_n a_n x_0^n = \sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée avec $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante (car pour tout $n \geq 1$, $0 < \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$, donc $0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$) et $\lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc cette série vérifie le C.S.S.A et par suite elle est convergente. D'où

$$D = [-3, 3[.$$

2. Notons R le rayon de convergence de cette série et
R_1 le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$.

En posant $X = x^2$ et en justifiant comme dans 1.b. on montre que $R = \sqrt{R_1}$.
Calculons R_1. On a $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2n+1}{2n+3} \underset{n \to +\infty}{\to} l = 1.$$

Par suite, d'après la règle de D'Alembert, $R_1 = 1/l = 1$ et donc $R = \sqrt{R_1} = 1$.

La somme S de cette série sur $]-1, 1[$:

On a $S(0) = a_0 = 1$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, $x \neq 0$,

$$S(x) = \frac{1}{x} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Considérons la série entière $\sum_{n \geq 0} x^{2n}$ dont le rayon de convergence est 1 avec pour tout $-1 < x < 1$, $S_1(x) := \sum_{n \geq 0} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$ (série géométrique).

La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ est la série primitive de $\sum_{n \geq 0} x^{2n}$ et donc a le même rayon de convergence et on a pour tout $-1 < x < 1$, $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \int_0^x S_1(t) dt$.

Reste à calculer cette intégrale.

1ère méthode :

On a

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right)$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt &= \frac{1}{2} \left[\ln|1+t| - \ln|1-t| \right]_{t=0}^{t=x} \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x} \right) \end{aligned}$$

car $-1 < x < 1$. D'où

$$S(x) = \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

pour tout $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ et $S(0) = 1$.

2ème méthode :

On sait que pour tout $-1 < x < 1$, $(\operatorname{Argth})'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ donc on a $S(0) = 1$ et pour tout $-1 < x < 1$, $x \neq 0$,

$$S(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt = \frac{1}{x}\left[\operatorname{Argth}(t)\right]_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{x}\left(\operatorname{Argth}(x) - \operatorname{Argth}(0)\right) = \frac{\operatorname{Argth}(x)}{x}$$

car $\operatorname{Argth}(0) = 0$.

Exercice 2

1. On a $a_0 = y(0) = 1$.
2. On suppose que cette équation admet une solution y développable en série entière dans un intervalle $]-R, R[$ avec $R > 0$. On a

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Donc pour tout $x \in]-R, R[$, $y'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2}$.

En remplaçant dans (E), on obtient pour tout $x \in]-R, R[$

$$\sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 1} 2n a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^{n+1} = 0$$

càd

$$\sum_{n\geq 1} n(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n\geq 0} 2(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n\geq 1} a_{n-1}x^n = 0.$$

Par suite

$$\sum_{n\geq 1} \left[(n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1}\right] x^n + 2a_1 = 0$$

pour tout $x \in]-R, R[$.

On en déduit que $a_1 = 0$ et que pour tout $n \geq 1$, $(n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1} = 0$ càd $a_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}a_{n-1}$.

Donc on a

$$a_n = \frac{-1}{n(n+1)}a_{n-2} \quad \text{pour tout } \ n \geq 2. \tag{1}$$

Deux cas :

i) Si $n = 2k+1$ impair, le fait que (1) est vraie pour tout $k \geq 1$ ($n \geq 3$) et que $a_1 = 0$, nous donne que $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \geq 0$.

ii) Si $n = 2k$ pair, $n \geq 2$ donc $k \geq 1$, on a d'après (1), pour tout $k \geq 1$,$a_{2k} = \frac{-1}{(2k)(2k+1)}a_{2k-2}$. Donc

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{-1}{(2k)(2k+1)}a_{2k-2} \\ a_{2k-2} &= \frac{-1}{(2k-2)(2k-1)}a_{2k-4} \\ &\vdots \\ a_2 &= \frac{-1}{2\times 3}a_0. \end{aligned}$$

En multipliant ces k égalités, on obtient pour tout $k \geq 1$,

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_0 = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

vu que $a_0 = y(0) = 1$. Cette expression est aussi vraie pour $k = 0$ donc on l'a pour tout $k \geq 0$.

Par suite
$$y(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k}.$$
En remontant les calculs, on vérifie que y est une solution de (E) sur $]-R,R[$ avec la condition initiale $y(0)=0$ à condition que $R>0$.

3. Calculons R le rayon de convergence de cette série. On posant $X=x^2$, on montre que $R=\sqrt{R_1}$ où R_1 est le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^k=\sum_{k\geq 0}b_kx^k$.
Calculons R_1. On a $b_k\neq 0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ et
$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|}=\frac{(2k+1)!}{(2k+3)!}=\frac{1}{(2k+2)(2k+3)}\underset{k\to+\infty}{\to}0.$$
Par suite $R_1=+\infty$ et donc $R=\sqrt{R_1}=+\infty$ et donc y est solution de (E) sur $]-R,R[=\mathbb{R}$.

On va exprimer maintenant y à l'aide des fonctions usuelles.
On a $y(0)=1$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ $(R=+\infty)$, on a
$$y(x)=\frac{1}{x}\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\frac{1}{x}\sin(x)$$
.