Partie commune - Devoir numéro 1

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; ***toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle****.*

Exercice 1. Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $\varphi(x, y) = (3by, 2x + ae^y)$. Calculer $\varphi(0, 0)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que φ soit linéaire.
2. On considère $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ **une** base de $\mathbb{R}^2$, et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linéaire dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) L'application f est-elle bijective ? Si oui, déterminer la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.
   (b) On pose $u = e_1 + 2e_2$ et $v = -e_1 + e_2$. Démontrer que $\mathcal{B}' = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant l'égalité
$$(*) \quad P(X^2) = (X^2 + 1)P(X).$$

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(*)$. Démontrer que le degré de P ne peut prendre que deux valeurs que l'on précisera.
2. En déduire l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(*)$.

Exercice 3. BONUS (à ne traiter que si vous avez fini le reste)
Déterminer, en justifiant avec soin, l'ensemble des diviseurs dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $P = X^2 + X + 1$.

Exercice 4. Le but de cet exercice est de montrer qu'il ne peut pas exister deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \arctan x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Rappeler le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \arctan x$, ainsi que sa limite lorsque x tend vers $+\infty$ et sa limite lorsque x tend vers $-\infty$.
2. En déduire que s'il existe P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \arctan x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
alors $\deg(P) = \deg(Q)$, et conclure à une absurdité.

Exercice 5. Considérons l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{ch} \frac{1}{x}. \end{array}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Montrer que l'équation :
$$g(x) = \tan x$$
possède une unique solution dans l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$, que l'on notera u_n.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $n\pi < u_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, et que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$
4. Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, on pose
$$v_n = u_n - n\pi.$$
Montrer que la suite $(\tan v_n)_{n\geq 1}$ est bien définie et strictement décroissante. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante et qu'elle converge.
5. Déterminer la limite de $(v_n)_{n\geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction du Devoir Surveillé 1 - partie commune - Algèbre

Correction de l'exercice 1

1. On a $\varphi(0,0) = (0,a)$. Supposons que φ est linéaire, alors $\varphi(0,0)$ doit être égal à $(0,0)$, ce qui implique $a = 0$.

   Réciproquement, supposons que $a = 0$ et $b \in \mathbb{R}$ est quelconque. Soient $u = (x,y)$, $v = (x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On calcule

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda u + \mu v) &= \varphi(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') \\
&= (3b(\lambda y + \mu y'), 2(\lambda x + \mu x')) \\
&= \lambda(3by, 2x) + \mu(3by', 2x') \\
&= \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)
\end{aligned}$$

   ce qui démontre la linéarité de φ.

   Ainsi, l'application φ est linéaire si et seulement si $(a,b) \in \{0\} \times \mathbb{R}$.

2. (a) On sait que l'application f est bijective si et seulement si sa matrice dans une base de $\mathbb{R}^2$ est de déterminant non nul. Ici, on a

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$$

   donc f est bijective. De plus, on a alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1} = A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) On cherche à savoir si $\mathcal{B}' = (u,v)$ est une base de E. Pour cela, étudions la colinéarité de u et v. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u + \mu v = (0,0)$. En remplaçant u et v par leurs expressions, on trouve $\lambda(e_1 + 2e_2) + \mu(-e_1 + e_2) = (0,0)$, ce qui est équivalent à $(\lambda - \mu)e_1 + (2\lambda + \mu)e_2 = (0,0)$. Puisque la famille (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, on en déduit le système suivant

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 0 \\ 2\lambda + \mu = 0 \end{cases}$$

   qui donne par opérations ou par substitution : $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. Par conséquent, les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires et la famille $\mathcal{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}^2$.

   (c) On cherche à déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$. Pour cela, on détermine $f(u)$ et $f(v)$ en fonction de u et v : on a $f(u) = f(e_1 + 2e_2) = f(e_1) + 2f(e_2)$ par linéarité de f. Grâce à la matrice A, on connait les expressions de $f(e_1)$ et $f(e_2)$, on trouve $f(e_1) = 2e_2$ et $f(e_2) = e_1 + e_2$. Au final, on obtient

$$f(u) = 2e_2 + 2(e_1 + e_2) = 2e_1 + 4e_2 = 2u \text{ et } f(v) = f(e_1) - f(e_2) = 2e_2 - (e_1 + e_2) = e_2 - e_1 = -v.$$

   La matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (u,v)$ est donc $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(*)$. Si $P = 0$, son degré vaut $-\infty$. Sinon, notons $d \in \mathbb{N}$ le degré de P. Il existe $(a_d, \dots, a_0) \in \mathbb{R}^{d+1}$, avec $a_d \neq 0$ tel que $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Par suite, on a $P(X^2) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X^2)^k = \sum_{k=0}^{d} a_k X^{2k}$

avec $a_d \neq 0$, ce qui montre que le polynôme $P(X^2)$ est de degré $2d$. Comme P vérifie $(*)$, ce polynôme est aussi égal à $(X^2+1)P(X)$. En égalant leurs degrés et en utilisant la formule sur le degré d'un produit (valable car ni P, ni X^2+1 n'est nul), on obtient

$$2d = \deg(X^2+1)\deg(P) = 2 + d \quad \text{d'où} \quad d = 2.$$

Ainsi, il n'y a que deux valeurs possibles pour le degré de P : $-\infty$ et 2.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a vu que si P vérifie $(*)$, alors $\deg(P) = -\infty$ ou 2. Le seul polynôme de degré $-\infty$ est le polynôme nul, qui vérifie de manière claire l'égalité $(*)$, il reste à savoir lesquels parmi les polynômes de degré 2 satisfont $(*)$. Supposons que P est de degré 2. On peut donc l'écrire sous la forme $P = aX^2+bX+c$ avec $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, d'où l'équivalence :

$$\begin{aligned} P \text{ vérifie } (*) \quad &\iff \quad aX^4+bX^2+c = (X^2+1)(aX^2+bX+c) \\ &\iff \quad aX^4+bX^2+c = aX^4+bX^3+(c+a)X^2+bX+c. \end{aligned}$$

Comme deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux, cela se réécrit sous la forme

$$\begin{aligned} P \text{ vérifie } (*) \quad &\iff \quad b = 0 \text{ et } c+a = b \\ &\iff \quad b = 0 \text{ et } c = -a. \end{aligned}$$

Ainsi, un polynôme de degré 2 vérifie $(*)$ si et seulement si il est de la forme $a(X^2-1)$ avec $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. En conclusion, l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $(*)$ est $\{a(X^2-1) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Correction de l'exercice 3 Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un diviseur de P dans $\mathbb{R}[X]$. Par définition, il existe alors $B \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = AB$. Puisque $P \neq 0$, A et B sont eux mêmes non nuls. La formule du degré d'un produit donne alors $\deg(P) = 2 = \deg(A) + \deg(B)$. Il y a donc 3 cas possibles : ($\deg(A) = 0$ et $\deg(B) = 2$), $\deg(A) = \deg(B) = 1$ ou ($\deg(A) = 2$ et $\deg(B) = 0$) (le premier et le dernier étant similaires).

- Si $\deg(A) = 0$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tel que $A = \lambda$.
- Si $\deg(A) = 2$, alors B est constant, donc on obtient $A = \mu(X^2+X+1)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$.
- Si $\deg(A) = 1$, le polynôme A s'écrit $A = aX+b$ avec $a,b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Il admet donc une racine réelle, à savoir $-\dfrac{b}{a}$, qui est en particulier racine de P (puisque $P = AB$). Ceci est absurde, car le polynôme P est un polynôme réel de degré 2 de discriminant strictement négatif, il ne possède donc pas de racine réelle. Ainsi, ce cas ne peut pas se produire.

Réciproquement, si $A = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, on peut écrire $P = A \times \dfrac{1}{\lambda}P$, avec $\dfrac{1}{\lambda}P \in \mathbb{R}[X]$, ce qui prouve que A est bien un diviseur de P. De même, si $A = \mu(X^2+X+1)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, on a $P = A \times \dfrac{1}{\mu}$ avec $\dfrac{1}{\mu} \in \mathbb{R}[X]$, donc A est un diviseur de P.
Au final, on a démontré que l'ensemble des diviseurs de P est $\{\lambda, \mu(X^2+X+1) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}^*\}$.

Analyse

Correction de l'exercice 4

1. La fonction $x \mapsto \arctan x$ est la bijection réciproque de la fonction

$$\tan : \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x. \end{array}$$

Ainsi $x \mapsto \arctan x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. De plus, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

2. Supposons qu'il existe P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \arctan x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Posons

$$P(x) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k x^k \text{ et } Q(x) = \sum_{k=0}^{q} \beta_k x^k,$$

où p et q désignent respectivement le degré de P et de Q. D'après le cours, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha_p x^p}{\beta_q x^q}, \qquad (*)$$

et qui par hypothèse vaut aussi

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Si $p \neq q$ alors la limite $(*)$ est soit nulle soit infinie, ce qui est faux dans les deux cas, donc $p = q$.

3. Finalement on a $p = q$ et donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha_p}{\beta_q} = \frac{\pi}{2}.$$

En regardant maintenant la limite lorsque x tend vers $-\infty$, on obtient de même

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\alpha_p}{\beta_q} = -\frac{\pi}{2},$$

ce qui est absurde.

Correction de l'exercice 5

1. Pour $n \geq 1$ fixé, posons la fonction :

$$h : \begin{array}{ccc}]n\pi-\frac{\pi}{2}, n\pi+\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x - \operatorname{ch}\frac{1}{x}, \end{array}$$

on doit donc montrer que h s'annule une et une seule fois sur $]n\pi-\frac{\pi}{2}, n\pi+\frac{\pi}{2}[$. Montrons qu'elle est strictement monotone. La fonction h est dérivable sur $]n\pi-\frac{\pi}{2}, n\pi+\frac{\pi}{2}[$ avec

$$h'(x) = 1 + \tan^2 x + \frac{1}{x^2}\mathrm{sh}\frac{1}{x}.$$

Comme $n \geq 1$, alors $x \geq \frac{\pi}{2}$ et donc $\mathrm{sh}\frac{1}{x} > 0$, d'où

$$h'(x) > 0, \quad \forall x \in]n\pi - \tfrac{\pi}{2}, n\pi + \tfrac{\pi}{2}[.$$

Finalement h est strictement croissante donc injective. De plus, on a

$$\lim_{x \to n\pi - \frac{\pi}{2}} h(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to n\pi + \frac{\pi}{2}} h(x) = +\infty,$$

le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue h, nous assure qu'il existe $u_n \in]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ tel que $h(u_n) = 0$ et l'injectivité de h assure son unicité.

2. Remarquons que $h(n\pi) = \tan(n\pi) - \mathrm{ch}\frac{1}{n\pi} = -\mathrm{ch}\frac{1}{n\pi} < 0$, donc $n\pi < u_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$.

3. Pour $n \geq 1$ on a

$$u_n < n\pi + \tfrac{\pi}{2} < n\pi + \pi = (n+1)\pi < u_{n+1}.$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc strictement croissante, de plus l'inégalité

$$n\pi < u_n,$$

assure sa divergence vers $+\infty$.

4. On a par définition $v_n = u_n - n\pi$, d'après le 2. on déduit que

$$0 < v_n < \frac{\pi}{2},$$

donc $\tan v_n$ est bien définie. Montrons sa stricte décroissance, comme $(u_n)_n$ est strictement croissante alors $(\frac{1}{u_n})_n$ est strictement décroissante et donc $(\mathrm{ch}\frac{1}{u_n})_n$ est strictement décroissante car la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. D'où

$$\tan v_n = \tan(u_n - n\pi) = \tan u_n = \mathrm{ch}\tfrac{1}{u_n} < \mathrm{ch}\tfrac{1}{u_{n+1}} = \tan u_{n+1} = \tan v_{n+1}.$$

La suite $(\tan v_n)_n$ est donc strictement décroissante. De plus on sait que la fonction $x \mapsto \arctan x$ est croissante donc la suite $(\arctan \tan v_n)_n$ est elle aussi strictement décroissante, et comme pour tout $n \geq 1$, on a $v_n \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors on a bien

$$\arctan \tan v_n = v_n, \quad \forall n \geq 1.$$

La suite $(v_n)_n$ est donc strictement décroissante, de plus elle est minorée par 0, donc converge vers $\ell \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

5. D'après la question précédente $(v_n)_n$ converge vers ℓ, donc par continuité de la fonction $x \mapsto \tan x$, la suite $(\tan v_n)_n$ converge vers $\tan \ell$. Or on a aussi

$$\tan v_n = \tan u_n = \mathrm{ch}\tfrac{1}{u_n},$$

et comme $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$, alors $(\frac{1}{u_n})_n$ tend vers 0 et par continuité en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}x$, la suite $(\mathrm{ch}\frac{1}{u_n})_n$ tend vers $\mathrm{ch}\,0 = 1$, donc par unicité de la limite, on a

$$\tan \ell = 1,$$

et comme $\ell \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\ell = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.