Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2011-2012

Math III - PMI

Correction du devoir n° 6 commun

Exercice 1.

1. Supposons $\bar{k}$ inversible alors il existe $\bar{j}$ (avec $j \in \mathbb{Z}$) tel que $\bar{k}\bar{j} = \bar{1}$. Par conséquent, $kj - 1$ est multiple de n, i.e. il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $kj - 1 = qn$ ou encore $jk + (-q)n = 1$. Cette relation de Bézout implique que k et n sont premiers entre eux.

   Réciproquement, s'ils sont premiers entre eux, on a une relation de Bézout : $ak + bn = 1$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. On considère la classe dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et on obtient finalement $\bar{a}\bar{k} = \bar{1}$ ce qui entraine l'inversibilité de $\bar{k}$.
2. 17 est premier donc l'odre de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ est $\varphi(17) = 16$.
3. La congruence en question est équivalente à
$$\bar{x}^{10} = \bar{1}.$$
4. On a $\bar{x} \cdot \bar{x}^9 = \bar{1}$ donc $\bar{x}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il appartient donc bien à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. L'ordre de $\bar{x}$ divise $16 = \mathrm{card}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*)$ (Lagrange). De plus, $\bar{x}^{10} = \bar{1}$ donc l'ordre de $\bar{x}$ divise 10. Ainsi les nombres demandés sont 10 et 16.
5. L'odre de $\bar{x}$ est donc un diviseur commun de 10 et 16. Les seuls possibilités sont : 1 et 2.
6. $\bar{x}^2 = \bar{1} \iff (\bar{x} - \bar{1})(\bar{x} + \bar{1}) = \bar{0}$. Le nombre 17 est premier, l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donc un corps donc l'égalité précédente entraine la nullité de l'un des facteurs. Finalement $\bar{x} \in \{\bar{1}, -\bar{1}\}$.

   Réciproquement $\bar{1}^{10} = \bar{1}$ et $(-\bar{1})^{10} = \bar{1}$ donc l'ensemble des solutions de $\bar{x}^{10} = \bar{1}$ est $\{\bar{1}, -\bar{1}\}$.

   Finalement l'ensemble des solutions de $x^{10} \equiv 1 \mod (17)$ est
$$\{1 + 17k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-1 + 17k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$
7. L'addition dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est donnée par $(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{c}, \bar{d}) = (\overline{a + c}, \overline{b + d})$.

   Dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4Z$, l'odre de tout élement divise 4 (car $4 \cdot (\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{0}, \bar{0})$). D'autres part, dans $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$ on a (par exemple) $\bar{2}^2 = \bar{4} \neq \bar{1}$, $\bar{2}^3 = \bar{8} \neq \bar{1}$ et $\bar{2}^4 = \overline{16} \neq \bar{1}$ donc $\bar{2}$ est d'ordre plus grand que 4. Enfin un isomorphisme conserve l'ordre donc il n'existe pas d'isomorphisme entre $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 2.

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions continues dont le dénumérateur ne s'annule pas sur l'ouvert $\mathbb{R}^*$. Montrons la continuité en $(0, 0)$. On a $y^4 \leq x^2 + y^4$ donc $y^2 = \sqrt{y^4} \leq \sqrt{x^2 + y^4}$ d'où $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^4}} \leq \frac{1}{y^2}$. En mutipliant par $|y|^3$ on obtient : $|f(x, y)| \leq |y|$. Quand $(x, y) \to (0, 0)$, $f(x, y)$ tend donc vers $0 = f(0, 0)$.
2. Notons $v = (a, b)$.
$$\begin{aligned} \frac{f((0,0) + tv) - f(0,0)}{t} &= \frac{1}{t} \frac{t^3 b^3}{\sqrt{t^2 a^2 + t^4 b^4}} \\ &= |t| \frac{b^3}{\sqrt{a^2 + t^2 b^4}} \end{aligned}$$
   Ce dernier tend vers 0 (quand t tend vers 0) si $a \neq 0$ et si $a = 0$, est égal à b donc tend vers b. Ainsi $D_{(a,b)} f(0, 0)$ est égale à 0 si $a \neq 0$ et b sinon.

3. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{(1,0)}f(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{(0,1)}f(0,0) = 1$.
4. Il suffit de remarquer que f est une quotient de deux fonctions. Le numerateur est une fonction monomiale et le dénominateur qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ est differentiable en dehors de $(0,0)$.
5. Pour $(x,y) \neq (0,0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-xy^3}{(x^2+y^4)^{3/2}}$. Montrons que ceci ne tend pas vers $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ quand $(x,y) \to (0,0)$. Pour $x > 0$, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \frac{-x^4}{(x^2+x^4)^{3/2}} = -(\frac{x^{8/3}}{x^2+x^4})^{3/2} = -(\frac{1}{x^{-2/3}+x^{4/3}})^{3/2}$. On voit que ceci tend vers $-\infty$ quand $x \to 0^+$ ce qui montre que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en 0.
6. Si f était différentiable en $(0,0)$, on aurait $D_{(1,1)}f(0,0) = D_{(1,0)}f(0,0) + D_{(0,1)}f(0,0)$. Or (par la question 2), $D_{(1,1)}f(0,0) = 0$ et $D_{(1,0)}f(0,0) + D_{(0,1)}f(0,0) = 0 + 1 = 1$. La fonction f n'est donc pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3.

1. Si $xy \leq 0$ alors $x^2 + y^2 \geq 0$ ce qui entraine $x^2 - xy + y^2 \geq -xy = |xy|$. Maintenant, si $xy \geq 0$ alors $(x-y)^2 \geq 0$ entraine $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ d'où $x^2 - xy + y^2 \geq xy = |xy|$.
2. Remarquons pour commencer que si $(x,y) \neq (0,0)$ alors $x^2 - xy + y^2 \geq |xy| > 0$ et $f(x,y)$ est bien défini.

   La fonction f est continue en dehors de $(0,0)$ comme quotient de deux fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi f est continue si et seulement si elle l'est en 0.

   Par la question 1, on a : pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| \leq \frac{|x^p y^q|}{|xy|} = |x^{p-1}||y^{q-1}|$. On voit que si $p \geq 2$ ou $q \geq 2$ alors f est continue en 0.

   Réciproquement, si $p < 2$ et $q < 2$ autrement dit si $p = q = 1$ alors pour $x \neq 0$, $f(x,x) = 1$ et f n'est pas continue en $(0,0)$. On peut donc conclure que f est continue si et seulement si $p \geq 2$ ou $q \geq 2$.
3. Comme p et q sont des entiers non nuls, la relation $p + q = 2$ entraine $p = q = 1$. D'après la question 2, f n'est pas continue, elle n'est donc pas différentiable.
4. (a) C'est une question de cours.

   (b) En fait $a = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$. On montre de façon symétrique que $b = 0$.

   (c) Par (a) et (b), f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $f(h,k)$ est un $o(\|(h,k)\|)$. Or pour $x \neq 0$,

   $$\frac{|f(x,x)|}{\sqrt{x^2+x^2}} = \frac{1}{2|x|} \cdot \frac{|x^{p+q}|}{x^2}.$$

   Rappelons qu'ici $p + q = 3$ on obtient donc ce qui précède égale

   $$\frac{1}{2|x|} \cdot \frac{|x^3|}{x^2} = \frac{1}{2|x|} \cdot |x| = \frac{1}{2}.$$

   Et cela ne tend pas vers 0 quand $x \to 0$. Ainsi f n'est pas différentiable en $(0,0)$.