Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2011-2012

Math III - PMI

Correction du devoir n° 4 commun

Exercice 1.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ alors $0 \leq (x^2 - y^2) = x^4 + y^4 - 2x^2y^2$ d'où l'inégalité demandée. Par suite, $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \leq 2(x^4 + y^4)$.

2. Soit $(x, y) \in E$. Alors $x^2(x-1)(x-3)+y^2(y^2-4) = 0$. En développant, on obtient : $x^4-4x^3+3x^2+y^4-4y^2 = 0$. Par la question 1, on a : $x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$ d'où
$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2 \leq 4x^3 - 3x^2 + 4y^2.$$
Écrivons $x = \rho \cos\theta$ et $y = \rho \sin\theta$ avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. L'inégalité précédente nous permet alors d'écrire :
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\rho^4 &\leq 4\rho^3\cos^3\theta + 4\rho^2\sin^2\theta - 3\rho^2\cos^2\theta \\ &\leq 4\rho^3\cos^3\theta + 4\rho^2\sin^2\theta \text{ (car } 3\rho^2\cos^2\theta \geq 0) \\ &\leq 4\rho^3 + 4\rho^2 \text{ (car } \cos^3\theta \leq 1 \text{ et } \sin^2\theta \leq 1).\end{aligned}$$
Finalement on a : $\rho^4 \leq 8\rho^3+8\rho^2$. Supposons $\rho > 1$. Alors en particulier $\rho \neq 0$ et on peut multiplier l'inégalité précédente par $\frac{1}{\rho^2} > 0$ ce qui donne : $\rho^2 \leq 8\rho + 8$. Par conséquent : $8 \geq \rho^2 - 8\rho = \rho(\rho - 8) > \rho - 8$ d'où $\rho < 16$. En conclusion de ce qui précède, si (x, y) appartient à E alors son rayon $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ est majoré par 16, ainsi E est contenu dans le disque centré en 0 et de rayon 16. L'ensemble E est donc borné.

3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2(x - 1)(x - 3) + y^2(y^2 - 4)$. Alors f est continue comme fonction polynomiale en x, y. L'ensemble E est alors $E = f^{-1}(\{0\})$, or $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc E est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Par la question précédente, E est borné. Ainsi E est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel normé de dimension finie et donc E est compact.

Exercice 2.

1. On rappelle la définition suivante : $\bar{A} = \{x \in E \mid \forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset\}$.
Soit $x \in \bar{A}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit donc $a_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Alors pour tout $n \geq 1$, $\|x - a_n\| < \frac{1}{n}$ donc la suite (a_n), qui est une suite de A, converge vers x.
Réciproquement, soit $x \in E$ et soit (a_n) une suite de A qui converge vers x. Soit $r > 0$ alors par définition de la limite d'une suite, on a en particulier : il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a_n \in B(x, r)$. Ainsi $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. On en conclut que $x \in \bar{A}$.

2. Soit $z \in \bar{A} + \bar{B}$. Alors il existe $x \in \bar{A}$ et $y \in \bar{B}$ tels que $z = x + y$. Par la question 1, il existe une suite (a_n) dans A et une suite (b_n) dans B telles que $a_n \to x$ et $b_n \to y$. Pour tout n, posons $z_n = a_n + b_n$. Alors (z_n) est une suite de $A + B$. De plus, $\|z_n - z\| = \|a_n - x + b_n - y\| \leq \|a_n - x\| + \|b_n - y\|$. La suite (a_n) converge vers x, c'est-à-dire $\|a_n - x\|$ tend vers 0 dans $\mathbb{R}$. De même, $\|b_n - y\|$ tend vers 0. On en déduit que $\|z_n - z\|$ tend vers 0, i.e. (z_n) converge vers z. Ainsi z est dans $\overline{A + B}$ (encore par la question 1).

3. (a) On remarque, via le cours, qu'une partie C de E est fermée si et seulement si $C = \bar{C}$. Ici on a alors $\bar{A} + \bar{B} = A + B \neq \overline{A + B}$.

(b) C'est un exemple vu en TD. Dans $E=\mathbb{R}^2$, soit $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$ et $B=\mathbb{R}\times\{0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\}$. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, (x,y)\mapsto xy$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, (x,y)\mapsto y$. Alors f et g sont continues et $A=f^{-1}(\{1\})$ et $B=g^{-1}(\{0\})$ d'où l'on déduit que A et B sont des fermés de $\mathbb{R}^2$.

$A+B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq 0\}$. Ceci n'est pas un fermé car la suite $((0,1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $(0,0)$ et $(0,0)\notin A+B$. Ainsi on est sous les hypothèses de 3(a) d'où la conclusion.

Exercice 3.

1. Pour $x\neq 0$, $f(x,0)=0$ donc la limite quand (x,y) tend vers 0 sur l'axe des abscisses est 0. D'autre part, $f(x,x)=\frac{x^2}{3x^2}=\frac{3}{2}$. Donc la restriction de f à la droite d'équation a pour limite $3/2$ en $(0,0)$. On en conclut que f n'a pas de limite en $(0,0)$.
2. (Remarque : dans x^2-xy on reconnait le "début" de l'identité remarquable $(x-\frac{1}{2}y)^2$)
   Pour $x,y\in\mathbb{R}$, $x^2-xy+y^2=((x-\frac{1}{2}y)^2-\frac{1}{4}y^2)+y^2=(x-\frac{1}{2}y)^2+\frac{3}{4}y^2\geq\frac{3}{4}y^2$. Par symétrie en x,y on obtient aussi :
   $$x^2-xy+y^2\geq\frac{3}{4}x^2.$$
   L'inégalité précédente nous donne :
   $$\begin{aligned}|f(x,y)| &= |y|\frac{x^2}{x^2-xy+y^2}\\ &\leq |y|x^2\frac{4}{3x^2}=\frac{4}{3}|y|.\end{aligned}$$
   Ainsi quand (x,y) tend vers $(0,0)$, on a en particulier $|y|$ qui tend vers 0 et on en déduit que $f(x,y)$ tend vers 0.
3. Pour $x\neq 0$, $f(x^2,x)=\frac{x^6}{x^8+x^6}=\frac{1}{x^2+1}$. Ceci tend vers 1 quand x tend vers 0. D'autre part $f(x,0)=0$ et ceci tend vers 0 quand x tend vers 0. Ainsi on a deux restrictions de f pour lesquelles les limites en $(0,0)$ sont différentes. On conclut que f n'a pas de limite en $(0,0)$.
4. (a) Pour la continuité en un point non nul, φ est un quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Étudions la continuité en 0. On remarque que pour $t\neq 0$, $\varphi(t)=\frac{e^t-e^0}{t-0}$. Quand t tend vers 0, on obtient (par définition de la fonction dérivée) $\exp'(0)=\exp(0)=1$. Or $\varphi(0)=1$ donc φ est continue en 0.

   (b) Pour $(x,y)\neq(0,0)$, écrivons :
   $$\begin{aligned}f(x,y) &= \frac{e^{xy}-1}{e^x-1}\\ &= \frac{e^{xy}-1}{xy}\cdot\frac{x}{e^x-1}\cdot y\end{aligned}$$
   Quand (x,y) tend vers $(0,0)$, les deux quotients tendent vers 1 par le (a) d'où l'on conclut que la limite de $f(x,y)$ est 0.

Exercice 4.

1. On a montré (voir Ex. 3, question 1) que $x^2-xy+y^2\geq\frac{3}{4}x^2$. Ainsi si $(x,y)\neq(0,0)$ alors $x^2-xy+y^2>0$.
2. (a) $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et sur cet ouvert f est un quotient de deux fonctions continues (avec le dénominateur qui ne s'annule pas) d'où la continuité en tout point de $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

(b) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$. On obtient alors : $1 - \sin(\theta)\cos(\theta) = 1 - \frac{1}{2}\sin(2\theta) \geq \frac{1}{2}$. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, écrivons $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$|f(x, y)| = \frac{\rho^{2\alpha}|\cos\theta\sin\theta|^{\alpha}}{\rho^2(1 - \cos\theta\sin\theta)} \leq 2\rho^{2(\alpha-1)}.$$

On obtient donc une majoration uniforme en θ. Quand (x, y) tend vers $(0, 0)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ tend vers 0. Comme $\alpha > 1$, on en conclut que $\rho^{2(\alpha-1)}$ tend vers 0 puis que $f(x, y)$ tend vers 0.

(c) Supposons $\alpha \leq 1$. Pour $x \neq 0$, $f(x, x) = \frac{x^{2\alpha}}{x^2} = x^{2(\alpha-1)}$. Quand x tend vers 0, ceci tend vers 1 si $\alpha = 1$ et vers $+\infty$ si $\alpha < 1$. D'autre part, la limite quand x tend vers 0 de $f(x, 0)$ est 0. On en déduit que f n'a pas de limite en $(0, 0)$.