DS n° 2 - Semestre 4 (2022/23)

Ex. 1

1) Montrons que F est fermé ce qui aura pour conséquence : $\overline{F} = F$

Soit (x_n, y_n, z_n) une suite de F convergente dont on note (x, y, z) la limite.

Pour tout n, $y_n^2 + z_n^4 \leq 4$. L'inégalité large est conservée quand on passe à la limite d'où : $x^2 + z^4 \leq 4$ et donc $(x, y, z) \in F$

2). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $(n, 0, 0) \in F$ car $0^2 + 0^4 \leq 3$

et $\|(n, 0, 0)\|_2 = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. F n'est donc pas borné

. En dimension finie les compacts sont les fermés bornés donc F n'est pas compact

3) G est séquentiellement fermé (même démo que pour F).

Ainsi $F \cap G$ est fermé. Montrons que $F \cap G$ est aussi borné.

Soit $(x, y, z) \in F \cap G$. Alors $y^2 \leq y^2 + z^4 \leq 3$ donc $|y| \leq \sqrt{3} \leq 2$

et $z^4 \leq 3$ donc $|z| \leq 3^{1/4} \leq 2$

De plus $x = 2 - y + 8z$ donc $|x| \leq 2 + |y| + 8|z| \leq 20$

Ainsi $\|(x, y, z)\|_\infty \leq 20$ ce qui montre que $F \cap G$ est borné.

$F \cap G$ est fermé et borné donc compact dans $\mathbb{R}^3$ (qui est de dim. finie)

4) Montrons que H n'est pas fermé.

Soit $\alpha_n = (0, y_n, 0)$ avec $y_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

La suite (α_n) est bien une suite de H mais $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = (0, 1, 0)$

et $(0, 1, 0) \notin A$ donc $(0, 1, 0) \notin H$. Ainsi H n'est pas (séquentiellement) fermé et donc H n'est pas compact

---

Ex. 2

1) On a $|f(x, y) - 0| = 2|x| \times \frac{y^2}{x^2 + y^2}$ et $\frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1$ donc

$|f(x, y)| \leq 2|x|$ ce qui montre que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$

2) . Voyons la limite le long d'une droite d'équation $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$.

$$f(x, mx) = \frac{x^2 + 2m^2x^2}{x - m^2x^2} = \frac{x + 2m^2x}{1 - m^2x} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{0}{1} = 0$$

• Il reste le cas de la droite d'équation $x = 0$:

$$f(0,y) = \frac{2y^2}{-y^2} = -2 \xrightarrow[y \to 0]{} -2$$

Ainsi la limite en $(0,0)$ est 0 le long de toutes les droites sauf le long de l'axe des ordonnées. Sur celui-ci, la limite est -2.

3) Les limites n'étant pas toutes les mêmes le long de toutes les droites, on peut conclure que la limite de f en $(0,0)$ n'existe pas

---

Ex. 3

1) F est un sev de E donc $0_E \in F$. Ce dernier étant ouvert, $\exists r > 0$ tq $B(0_E, r) \subseteq F$

2) On pose $y = \frac{1}{\|x\|} \times \frac{r}{2} \times x$. On obtient $y \in F$ car $x \in F$ et $\|y\| = \left| \frac{1}{\|x\|} \times \frac{r}{2} \right| \times \|x\| = \frac{r}{2} < r$ donc $y \in B(0_E, r)$

3) Par définition, $F \subseteq E$. Voyons l'inclusion inverse.

Soit $x \in E$. Si $x = 0_E$ alors $x \in F$. Si $x \neq 0_E$ alors soit y défini comme au 2). On a alors $x = \|x\| \times \frac{2}{r} \times y \in F$.

Ex. 4

1) On a : $g(0) = 0$ donc $g \in F$ et comme $f \in F^\perp$, on obtient $\langle f, g \rangle = 0$ ce qui donne : $0 = \langle f, g \rangle = \int_0^1 t\, f^2(t)\, dt$

L'application $t \longmapsto t f^2(t)$ est continue et positive sur $[0,1]$ donc est nulle. En particulier, $\forall t \in]0,1[$, $f^2(t) = 0$ ie $f(t) = 0$.

Par continuité de f, $f(0) = f(1) = 0$ et donc $f = 0_E$

2) Supposons par l'absurde qu'il existe G sev de E t.q $E = F \oplus G$ et $F \perp G$.

Soit $g \in G$ alors $g \in F^\perp$ et par la question 1, $g = 0_E$

Ainsi $G = \{0_E\}$ ce qui implique $E = F$ d'où l'absurdité (car la fonction définie par $f(t) = 1$ est dans E mais pas dans F).

3) Soit $f \in \Gamma$. On applique Cauchy-Schwarz à $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$:

$$\|\sqrt{f}\|^2 \times \left\|\frac{1}{\sqrt{f}}\right\|^2 \geqslant \langle f, \tfrac{1}{f} \rangle = \int_0^1 dt = 1. \quad (*)$$

On obtient : $\int_0^1 \left(\sqrt{f(t)}\right)^2 dt \times \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{1}{f(t)}}\right)^2 dt \geqslant 1$

Ce qui donne $\varphi(f) \geq 1$.

On a égalité si et s. si $\circledast$ est une égalité ce qui équivaut à : $\sqrt{f}$ et $\frac{1}{\sqrt{f}}$ sont colinéaires.

Ainsi $\varphi(f) = 1 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}$ (même dans $\mathbb{R}^+$) tq $\forall t$, $\sqrt{f(t)} = \lambda \frac{1}{\sqrt{f(t)}}$

$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^+$ tq $|f(t)| = \lambda$

or f est positive donc : $\varphi(f) = 1 \iff f$ est constante.

Ex. 5

1) Montrons que la famille des A_i est libre : soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in$ t.q $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i A_i = 0$. On obtient : $\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et $\lambda_1 - \lambda_3 = \lambda_1 = 0$. La famille est bien libre.

Ainsi dim $S \geq 3$ (conséquence du Th. de la base incomplète).

Or dim $M_2(\mathbb{R}) = 4$ donc dim $S \in \{3, 4\}$. Si dim $S = 4$ alors $S = M_2(\mathbb{R})$ ce qui est absurde car par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \setminus S$ donc dim $S = 3$. La famille des A_i est libre et son cardinal est $3 = \dim S$ donc c'est une base de S.

2) Si on suit l'algorithme de Gram-Schmidt à partir des A_i, on constate déjà que $\langle A_1, A_2 \rangle = 0$ et $\langle A_2, A_3 \rangle = 0$.

On pose donc : $C_1 = A_1$, $C_2 = A_2 - \frac{\langle A_2, C_1 \rangle}{\langle C_1, C_1 \rangle} C_1 = A_2$

puis $C_3 = A_3 - \frac{\langle A_3, C_1 \rangle}{\langle C_1, C_1 \rangle} C_1 - \frac{\langle A_3, C_2 \rangle}{\langle C_2, C_2 \rangle} C_2 = A_3 - \frac{-1}{1} C_1$

$= A_3 + A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

On obtient donc la base orthogonale (A_1, A_2, C_3) qu'il suffit de normaliser : $\|A_1\| = 1$, $\|A_2\| = \sqrt{2}$ et $\|C_3\| = 1$ d'où la base orthonormée suivante : $\left(A_1, \frac{A_2}{\sqrt{2}}, C_3\right)$.

3) On a : $\dim S^\perp = \dim E - \dim S = 4 - 3 = 1$

De plus la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in S^\perp$ car $\langle A_i, N \rangle = 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

On obtient $S^\perp = \text{Vect}\{N\}$.