DS n°2 - Partie Algèbre.

Ex. 5

1) On sait que $\mathrm{card}(S_3) = 3! = 6$ donc si on arrive à exhiber 6 éléments distincts 2 à 2 dans S_3, on les aura tous trouvés.

On a : Id ; les transpositions $(1\,2)$, $(1\,3)$, $(2\,3)$

et les 3-cycles $(1\,2\,3)$, $(1\,3\,2)$

Finalement $S_3 = \{ Id, (12), (13), (23), (123), (132) \}$

2) Montrons que pour $\sigma \in S_n$:

$\sigma = Id \iff \mathrm{Card}\{ i \,/\, \sigma(i) = i \} \geqslant n-1$

$\Rightarrow$ cette implication est triviale puisque $\mathrm{card}\{ i \,/\, Id(i) = i \} = n$

$\Leftarrow$ Par contraposée supposons que $\sigma \neq Id$.

Alors $\exists\, i_1 \in \{1, \dots, n\}$ t.q. $\sigma(i_1) \neq i_1$. Notons $i_2 = \sigma(i_1)$.

On a nécessairement $\sigma(i_2) \neq i_2$ car sinon on aurait $\sigma(i_2) = i_2 = \sigma(i_1)$ avec $i_1 \neq i_2$ et on perdrait l'injectivité.

Ainsi on a $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$ avec $i_1 \neq i_2$ tq $\sigma(i_1) \neq i_1$ et $\sigma(i_2) \neq i_2$

Par conséquent : $\mathrm{card}\{ i \,/\, \sigma(i) = i \} \leqslant n-2 < n-1$.

3) Faux. Par exemple avec $\sigma = (12) \circ (34)$ dans S_n avec $n \geqslant 4$

$\sigma^2 = (12)(34)(12)(34) = (12)^2 (34)^2$ (commutent car à supports disjoints)

$= Id$

Ex. 6

1) $|A(x)| = \begin{vmatrix} x+3 & 7 & x-2 \\ 3x-1 & -x+3 & 6 \\ x-3 & 4 & x+7 \end{vmatrix}$

On pourrait développer directement par rapport à une ligne ou une colonne mais c'est plus judicieux de chercher une opération élémentaire qui va faire apparaître un facteur.

On a (au moins) deux telles opérations : $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

ou $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

En utilisant l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$,

$$|A(x)| = \begin{vmatrix} 2x+8 & 7 & x-2 \\ 2x+8 & -x+3 & 6 \\ 2x+8 & 4 & x+7 \end{vmatrix} = (2x+8)\begin{vmatrix} 1 & 7 & x-2 \\ 1 & -x+3 & 6 \\ 1 & 4 & x+7 \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$= (2x+8)\begin{vmatrix} 1 & 7 & x-2 \\ 0 & -x-4 & 8-x \\ 0 & -3 & 9 \end{vmatrix} = (2x+8)\begin{vmatrix} -x-4 & 8-x \\ -3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (2x+8)\left(-9x-36+24-3x\right) = (2x+8)(-12x-12)$$
$$= -24(x+4)(x+1)$$

2) On sait que : $\text{rg}(A(x)) = 3 \iff \det(A(x)) \neq 0 \iff x \neq -4$ et $x \neq -1$

$A(-4) = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -6 \\ -13 & 7 & 6 \\ -7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ est de rang 2 (c'est < 3 car $\det(A(-4)) = 0$ et c'est ≥ 2 car C_1 et C_2 sont non colinéaires)

$A(-1) = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ -4 & 4 & 6 \\ -4 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ est de rang 2 (mêmes arguments)

Ex. 7

$\det(B^2) = \det\left((5A+15I)^2\right) = \det\left((5(A+3I))^2\right)$
$= \det\left(25(A+3I)^2\right) = 25^2 \det((A+3I^2))$ (le 25^2 vient du fait qu'on soit dans $M_2(\mathbb{R})$)
$= 25^2 \det(A^2 + 6A + 9I)$

or $A^2 = -6A - 6I$ donc

$\det(B^2) = 25^2 \det(3I) = 25^2 \times 9$

Ainsi $(\det(B))^2 = \det(B^2) = (25 \times 3)^2$

or $\det B > 0$ par hypothèse donc $\det B = 25 \times 3 = 75$

Ex. 8

1) Soit $x \in F$. Alors $\exists y \in E$ t.q $x = (u - 2\,Id)(y) = u(y) - 2y$

On applique u : $u(x) = u(u(y) - 2y) = u^2(y) - 2u(y)$ par linéarité

Or par hypothèse, $u^2 = 5u - 6\,Id$ donc

$u(x) = 5u(y) - 6y - 2u(y) = 3u(y) - 6y = 3(u(y) - 2y) = 3x$

2) • Montrons que $F \cap G = \{0\}$.

Soit $x \in F \cap G$. Alors par 1), $u(x) = 3x$ et par définition de G, on a $(u - 2\,Id)(x) = 0$, i.e. $u(x) = 2x$.

Par conséquent $3x = 2x$ et donc $x = 0$.

• D'autre part, le théorème du rang appliqué à $u - 2\,Id$ implique $\dim F + \dim G = \dim E$.

On peut conclure que : $E = F \oplus G$

3) Pour tout $x \in \mathcal{B}_F$, $u(x) = 3x$ et pour $x \in \mathcal{B}_G$, $u(x) = 2x$ ce qui donne la matrice suivante :

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{3\ \ddots\ 3}}^{u(\mathcal{B}_F)} & \overbrace{\hphantom{2\ \ddots\ 2}}^{u(\mathcal{B}_G)} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 3 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 3 & & & \\ & & & 2 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}3\\ \ddots\\ 3\end{array}}\right\} \mathcal{B}_F \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}2\\ \ddots\\ 2\end{array}}\right\} \mathcal{B}_G \end{array} \end{array}$$

le nombre de 3 est égal à $\dim F = p$.

Autrement dit $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} 3I_p & 0 \\ 0 & 2I_{n-p} \end{bmatrix}$.