Correction du devoir n° 2 commun

Exercice 1.

1. (a) Soit $x \in \ker(u)$ alors $u(x) = 0 \in \ker(u)$. Ainsi le noyau de u est stable par u. D'autre part, pour tout $x \in E$, $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ donc en particulier $u(\mathrm{Im}(u)) \subset \mathrm{Im}(u)$.

   (b) Soit $x \in E_\lambda$ alors $u(x) = \lambda x \in E_\lambda$.

   (c) Soit $x \in \mathrm{Vect}\{x_1, x_2\}$ alors il existe deux réels a_1, a_2 tels que $x = a_1x_1 + a_2x_2$. On a alors : $u(x) = a_1u(x_1) + a_2u(x_2) = a_1\lambda_1x_1 + a_2\lambda_2x_2 \in \mathrm{Vect}\{x_1, x_2\}$.

2. (a) En calculant le polynôme caractéristique, on trouve $a = 1$.

   (b) Le (a) nous permet de dire que les valeurs propres de u sont 1 et -1. Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\ker(u - \lambda\mathrm{Id}) = \{0\}$. En particulier pour $\lambda = 0$, on obtient $\ker(u) = \{0\}$. L'application u étant un endomorphisme sur $\mathbb{R}^3$ (qui est de dimension finie), on en déduit que u est surjective, à savoir $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.

   (c) Notons $A_1 = A - 1 \cdot \mathrm{Id}$ et $A_{-1} = A - (-1) \cdot \mathrm{Id}$. Ainsi $E_1 = \ker(A_1)$ et $E_{-1} = \ker(A_{-1})$. On a :

   $$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   On voit donc que A_1 est de rang 1 donc par le théorème du rang, E_1 est de dimension 2, i.e. c'est un plan. Si on note C_i les colonnes de A_1, on voit que $C_1 + C_2 = 0$ et $C_1 + 2C_3 = 0$. Ainsi les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$ et $v_2 = (1, 0, 2)$ sont dans E_1. Ce dernier étant de dimension 2 et les vecteurs v_1 et v_2 non colinéaires, on en déduit que v_1 et v_2 forment une base de E_1.

   (d) Notons également C_i les colonnes de A_{-1}. On voit aisément que $C_1 + C_2 - 2C_3 = 0$. Ainsi, le vecteur $w = (1, 1, -2)$ appartient à E_{-1}. De plus, on voit que A_{-1} est de rang 2 et la dimension de E_{-1} est donc 1. On en déduit que $E_{-1} = \mathrm{Vect}(w)$.

   (e) La famille formée de v_1, v_2 et w est une base de vecteurs propres et u est donc diagonalisable.

   (f) La définition de vecteur propre ainsi que la question 1.(c) nous permettent de dire que les six espaces suivants sont stables par u : $\mathrm{Vect}(v_1)$, $\mathrm{Vect}(v_2)$, $\mathrm{Vect}(w)$, $\mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, $\mathrm{Vect}(v_1, w)$, $\mathrm{Vect}(v_2, w)$.

Exercice 2.

1. Le polynôme caractéristique P_A est de degré 7 or comme conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle, d'où le résultat voulu.

2. (a) En cherchant à factoriser P par $X^2 + 1$ on obtient que si une factorisation existe alors il s'agit de $P = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$. En redéveloppant, on obient bien P. (Une autre méthode consiste en la division euclienne de P par $X^2 + 1$).

   Le discriminant de $Q = X^2 + X + 1$ est -3, on en déduit que Q est irréductible. De même pour $X^2 + 1$. Ainsi l'égalité $P = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$ est la factorisation en facteurs irréductibles de P.

(b) De la question (a) on peut dire que P n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$. Voyant A comme matrice complexe, on sait que P_A et le polynôme minimal m_A ont les mêmes racines (dans $\mathbb{C}$). Or les racines de P ne sont pas réelles et P_A en possède une, on en conclut que P n'est pas le polynôme minimal de A.

Exercice 3.

1. Il s'agit d'une recurrence facile dont l'étape principale consiste à ecrire : $A^{k+(q+1)} = A^{k+q}A = A^kA = A^{k+1} = A^k$.
2. Par 1, on a $A^{2k} = A^k$. On déduit que le polynôme $P = X^2 - X$ est annulateur de A. Le polynôme P égale $X(X-1)$. Il est donc scindé à racines simples. On en déduit que A^k est diagonalisable. (Remarque : P n'est pas nécessairement le polynôme minimal.)
3. On a :

$$\begin{aligned}(A^k - A^p)^k &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{n}{j}A^{kj}A^{p(k-j)} \\ &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{n}{j}A^{kj+p(k-j)}.\end{aligned}$$

On constate que pour $j \in \{1,\dots,k\}$, $kj + p(k-j) \geq kj \geq k$ et pour $j = 0$, $kj + p(k-j) = pk \geq k$ (car $p \geq 1$). Ainsi toutes les puissances de A sont supérieures ou égales à k. De 1, on déduit que

$$\begin{aligned}(A^k - A^p)^k &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{n}{j}A^k \\ &= (\sum_{j=0}^{k}1^j(-1)^{k-j}\binom{n}{j})A^k \\ &= ((1+(-1))^k)A^k \\ &= 0A^k = 0\end{aligned}$$

Exercice 4.

1. Faux. La série $\sum \frac{1}{n^2}$ fournit un contre-exemple.
2. Faux. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{-n}$ si n est pair et $u_n = e^{-2n}$ si n est impair.
   Soit $n \geq 3$ impair. Alors $u_n = e^{-2n}$ et $u_{n+1} = e^{-(n+1)}$. Ainsi, $u_n = e^{-(n+1)-(n-1)} = u_{n+1} \cdot e^{-(n-1)} < u_{n+1}$.
3. Vrai. La suite (u_n) tend vers 0 donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, $u_n \leq 1$, d'où $u_n^2 \leq u_n$ ce qui montre que la série (à termes positifs) $\sum u_n^2$ converge.
4. Faux. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln(n)}$ fournit un contre-exemple.
5. Vrai. En effet, la suite $(|u_n|)$ est alors équivalente à $(\frac{1}{n^2})$ quand $n \to +\infty$. Ainsi la série $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.