Université Lyon 1
Mathématiques: cursus préparatoire
Serge Parmentier

Chapitre 2. Les fractions rationnelles.

1. Rappel

L'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels est l'ensemble des expressions de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, étant entendu que l'on a $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ ssi $ab' = a'b$ (produit croisé).
Soit $x \in \mathbf{Q}$; tout couple (a, b) tel que $x = \frac{a}{b}$ est appelé un représentant de x. Tout rationnel admet une infinité de représentant: si $x = \frac{a}{b}$, on a $x = \frac{ac}{bc}$, pour tout $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. La fraction réduite ou représentant irréductible de $x \in \mathbf{Q}^\star$ est l'unique écriture $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in Z, q \in N \setminus \{0\}$, pgcd $(p, q) = 1$.

On observe ensuite que la somme $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$ dépend seulement de $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ et non pas des représentants (a, b) et (c, d). En clair: si $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, alors $\frac{ad+cb}{bd} = \frac{a'd'+c'b'}{b'd'}$. Idem pour la multiplication $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
On dispose donc de deux lois $+$ et $\times$ sur $\mathbf{Q}$ pour lesquelles $(\mathbf{Q}, +, \times)$ est un corps de neutre $\frac{0}{1}$ pour $+$ et $\frac{1}{1}$ pour $\times$. L'application $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q} : l \mapsto \frac{l}{1}$ est alors un morphisme injectif d'anneaux. On convient de ne pas écrire 1 au dénominateur, i.e. on écrit a pour $\frac{a}{1}$ et on voit $\mathbf{Z}$ comme une partie de $\mathbf{Q}$.

On a donc créé un corps $\mathbf{Q}$ où les entiers relatifs non nuls sont inversibles pour $\times$, l'inverse de $l \neq 0$ étant $\frac{1}{l}$.

2. Le corps des fractions rationnelles

On va procéder à l'identique pour l'anneau des polynômes $K[X]$ à coefficients dans un corps K: on va créer un corps noté $K(X)$, appelé *corps des fractions de* $K[X]$ ou *corps des fractions rationnelles en une indéterminée* X, qui est à $K[X]$ ce que $\mathbf{Q}$ est à $\mathbf{Z}$.
Définition: L'ensemble $K(X)$ est l'ensemble des expressions $\frac{A}{B}$ avec $A \in K[X]$ et $B \in K[X] \setminus \{0\}$, avec la convention $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$ ssi $AB' = A'B$.

Soit $F \in K(X)$. Si deux polynômes A et B sont tels que $F = \frac{A}{B}$, on dit que (A, B) ou encore $\frac{A}{B}$ est un représentant de F. Il y a une infinité de représentant de F: si (A, B) convient alors (AC, BC) convient pour tout $C \neq 0$.

Comme pour $\mathbf{Q}$, si l'on pose $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+CB}{BD}$ et $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$, alors les membres de droite sont indépendants des représentants (A, B) et (C, D): vérifions le pour l'addition:
si $AB' = A'B$ et $CD' = C'D$, alors $(AD + CB)B'D' = AB'DD' + CD'BB' = A'BDD' + C'DBB' = (A'D' + C'B')BD$, i.e. $\frac{AD+CB}{BD} = \frac{A'D'+C'B'}{B'D'}$.
On a donc deux lois de compositions internes

$$+ : K(X)^2 \to K(X) \qquad \cdot : K(X)^2 \to K(X)$$

Proposition: $(K(X), +, \cdot)$ est un corps de neutres pour $\frac{0}{1}$ pour l'addition $+$ et $\frac{1}{1}$ pour la multiplication $\cdot$. L'opposé de $\frac{A}{B}$ est $\frac{-A}{B}$ et l'inverse multiplicatif de $\frac{A}{B}$, $A \neq 0$ est $\frac{B}{A}$.
De plus, l'application

$$K[X] \to K(X) : A \mapsto \frac{A}{1}$$

est un morphisme injectif d'anneaux conservant l'unité. Comme pour le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels, on omettra toujours d'écrire 1 au dénominateur, i.e. on écrira A pour $\frac{A}{1}$ et on pensera à $K[X]$ comme inclus dans $K(X)$. Tout polynôme non nul $A \in K[X] \subset K(X)$ est à présent inversible pour $\cdot$ dans $K(X)$ et son inverse est $\frac{1}{A}$.

Degré d'une fraction rationnelle non nulle

Soit $A \in K[X] \setminus \{0\}$. On observe que si $\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'}$, i.e. si $AB' = A'B$, alors $d_A + d_{B'} = d_{A'} + d_B$, i.e. $d_A - d_B = d_{A'} - d_{B'}$, i.e. si $F = \frac{A}{B} \in K(X) \setminus \{0\}$, l'entier $d_A - d_B$ est indépendant du représentant (A, B) choisi.

Définition: L'entier $d_A - d_B$ est appelé le *degré* de $F = \frac{A}{B}$. On pose $deg(0) = -\infty$.

Exercice: pour tout $(F, G) \in K(X)^2$, on a $deg(F + G) \leq max(deg(F), deg(G))$ et $deg(FG) = deg(F) + deg(G)$.

Représentant irréductible.

Proposition: Soit $F \in K(X)$ non nulle. Il existe un unique représentant (P, Q) tel que pgcd $(P, Q) = 1$ et Q est unitaire (i.e. normalisé).

preuve: cf cours.

Pôle/Evaluation

Soit $F = \frac{P}{Q}$ où (P, Q) est le représentant irréductible de F.

Définition: On appelle *pôle* de F toute racine $\alpha \in K$ du polynôme Q. On dit qu'un pôle $\alpha \in K$ est d'ordre m si α est racine de Q de multiplicité m i.e. si $(X - \alpha)^m$ divise Q et $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas Q.

Exemple: soient $u, v \in C^{\times}, u \neq v$. u est pôle d'ordre 2 et v est pôle d'ordre 1 de la fraction rationnelle $\frac{X}{(X-u)^2(X-v)}$.

Si $\alpha \in K$ n'est pas un pôle de F l'évaluation de F en α est l'élément $F(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)} \in K$.

Si α n'est pas pôle de F et G, on a $(F + G)(\alpha) = F(\alpha) + G(\alpha)$ et $(F \cdot G)(\alpha) = F(\alpha)G(\alpha)$.

Dans la proposition qui suit, si $A = \sum_{0 \leq j \leq n} a_j X^j \in K[X]$, on désigne par A' le polynôme dérivé $A' = \sum_{0 \leq j \leq n-1} (j + 1) a_{j+1} X^j \in K[X]$.

Proposition/définition: si $F = \frac{A}{B}$, $\frac{A'B - AB'}{B^2}$ est indépendante du représentant (A, B) de F choisi. La fraction rationnelle

$$F' = \frac{A'B - AB'}{B^2}$$

est appelée la *dérivée* de F.

Exercice: montrer que $(FG)' = F'G + FG'$.

Cette règle est la même que pour les quotients de fonctions réelles, on aura par exemple $\frac{1}{(X-u)^m}' = -\frac{m}{(X-u)^{m+1}}$.

3. Décomposition en éléments simples.

Définition: on dit qu'une fraction rationnelle $F \in K(X)$ est un *élément simple* s'il existe deux polynômes R et S et un entier $m \in N \setminus \{0\}$ tels que

$$F = \frac{R}{S^m}$$

avec S irréductible unitaire (i.e. normalisé) et $deg(R) < deg(S)$.

Exemples: Sur le corps **C**, tout élément simple s'écrit $\frac{z_0}{(X-z)^m}$, $z_0, z \in \mathbf{C}, m \geq 1$.

Sur le corps **R**, il y a deux types d'éléments simples $\frac{r_0}{(X-r_1)^m}$ et $\frac{r_0+r_1X}{(X^2+bX+c)^m}, r_0, r_1, a, b \in \mathbf{R}, b^2 - 4c < 0, m \geq 1$.

Il se fait que *toute fraction rationnelle est, d'une manière unique (à l'ordre des facteurs près), somme d'un polynôme et d'éléments simples.*
Voici un premier exemple:

$$\frac{X}{(X-a)(X-b)} = \frac{a}{a-b}\frac{1}{X-a} + \frac{b}{b-a}\frac{1}{X-b}, \ a, b \in \mathbf{C}^\star, a \neq b.$$

Théorème de décomposition en éléments simples:
Soit F une fraction rationnelle dont le représentant irréductible est

$$F = \frac{A}{S_1^{m_1} \cdots S_n^{m_n}}$$

avec $A \in K[X] \setminus \{0\}$, les polynômes S_i irréductibles normalisés, deux à deux distincts et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $m_i \in N \setminus \{0\}$.
Alors, il existe d'uniques polynômes $E; B_{1,1}, \dots, B_{1,m_1}; B_{2,1}, \dots, B_{2,m_2}; \dots; B_{n,1}, \dots, B_{n,m_n}$ de $K[X]$ tels que

$$\begin{aligned} F &= E + \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq m_i} \frac{B_{i,j}}{S_i^j} \\ &= E + \left(\frac{B_{1,1}}{S_1} + \ldots + \frac{B_{1,m_1}}{S_1^{m_1}}\right) + \ldots + \left(\frac{B_{n,1}}{S_n} + \ldots + \frac{B_{n,m_n}}{S_n^{m_n}}\right) \end{aligned}$$

et pour tout (i,j) $deg(B_{i,j}) < deg(S_i)$.
Le polynôme E, appelé *partie entière* de F est le quotient de la division euclidienne de A par $\Pi_{1 \leq i \leq n} S_i^{m_i}$.

Voici la forme de cette décomposition sur les corps **C** et **R** et deux exemples:

Sur **C**, les irréductibles normalisés sont les $X - z \in \mathbf{C}[X]$ et les polynômes $B_{i,j}$, étant de degré $deg(B_{i,j}) < 1$, sont constants, i.e. $B_{i,j} = \beta_{i,j} \in \mathbf{C}$.
On a donc, pour n nombres complexes $z_1, \dots, z_n$ deux à deux distincts,

$$F = \frac{A}{(X-z_1)^{m_1} \cdots (X-z_n)^{m_n}} = E + \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq m_i} \frac{\beta_{i,j}}{(X-z_i)^j}.$$

Le terme correspondant au $i-$ème facteur premier $S_i = (X - z_i)$:

$$\frac{\beta_{i,1}}{(X-z_i)} + \ldots + \frac{\beta_{i,m_i}}{(X-z_i)^{m_i}}$$

est appelé la *partie principale* de F au pôle z_i et le coefficient $\beta_{i,1}$ est appelé le *résidu* de F en ce pôle.

Sur **R**, les irréductibles normalisés sont les polynômes $(X - a), a \in \mathbf{R}$, et les polynômes de degré 2 sans racine réelle $X^2 + bX + c$ avec $b^2 - 4c < 0$.

Les polynômes $B_{i,j}$ sont des constantes $\alpha_{i,j} \in \mathbf{R}$ pour les irréductibles de degré 1 et des polynômes $\beta_{i,j} + \gamma_{i,j}X \in \mathbf{R}[X]$ de degré 1 pour les irréductibles de degré 2.
On a donc

$$\begin{aligned} F &= \frac{A}{(X-a_1)^{l_1}\ldots(X-a_r)^{l_r}(X^2+b_1X+c_1)^{m_1}\ldots(X^2+b_sX+c_s)^{m_s}} \\ &= E + \sum_{1\le i\le r}\sum_{1\le j\le l_i}\frac{\alpha_{i,j}}{(X-a_i)^j} + \sum_{1\le i\le s}\sum_{1\le j\le m_i}\frac{\beta_{i,j}+\gamma_{i,j}X}{(X^2+b_iX+c_i)^j} \end{aligned}$$

Voici comment décomposer une fraction rationnelle $F = \frac{A}{S}$ sur $K = \mathbf{C}$ ou $K = \mathbf{R}$:

1. Si $deg(A) \geq deg(S)$, effectuer la division euclidienne de A par S dans $K[X]$: $A = ES + R$, $deg(R) < deg(S)$. Dans $K(X)$, on a alors

$$\frac{A}{S} = E + \frac{R}{S}, \quad deg(\frac{R}{S}) < 0.$$

2. Factoriser S en irréductibles normalisés, i.e. écrire

$$S = \lambda\,\Pi_{i=1}^{i=n} S_i^{m_i},$$

avec $\lambda \in K^\star$, $S_i \in K[X]$ irréductibles normalisés deux à deux distincts.

3. Ecrire la forme de la décomposition en éléments simples de $\frac{R}{S}$ donnée par le théorème.
Voici un exemple sur $\mathbf{C}$:

$$\frac{R}{S} = \frac{X}{(X-z_1)(X-z_2)^m} = \frac{\beta_{1,1}}{(X-z_1)} + \frac{\beta_{2,1}}{(X-z_2)} + \ldots + \frac{\beta_{2,m}}{(X-z_2)^m},$$

$z_1, z_2 \in \mathbf{C}^\star, z_1 \neq z_2,\ m \geq 2, \beta_{i,j} \in \mathbf{C}$.

Voici un exemple sur $\mathbf{R}$:

$$\frac{R}{S} = \frac{X}{(X-a)(X^2+bX+c)^m} = \frac{\alpha_{1,1}}{(X-a)} + \frac{\beta_{1,1}+\gamma_{1,1}X}{X^2+bX+c} + \ldots + \frac{\beta_{1,m}+\gamma_{1,m}X}{(X^2+bX+c)^m},$$

$a \in \mathbf{R}^\star, b, c \in \mathbf{R}, b^2-4c<0,\ m \geq 2, \alpha_{1,1}, \beta_{1,i}, \gamma_{1,i} \in \mathbf{R}$.

4. Déterminer les coefficients de la décomposition:
Dans l'exemple sur $\mathbf{C}$, pour obtenir $\beta_{2,m}$, commencer par multiplier par $(X-z_2)^m$:

$$(X-z_2)^m\frac{R}{S} = \frac{X}{(X-z_1)} = \beta_{1,1}\frac{(X-z_2)^m}{(X-z_1)} + \beta_{2,1}(X-z_2)^{m-1} + \ldots + \beta_{2,m-1}(X-z_2) + \beta_{2,m} \quad (1)$$

et ensuite évaluer en z_2:

$$\frac{z_2}{(z_2-z_1)} = \beta_{2,m}$$

Pour obtenir $\beta_{2,m-1}$ prendre la dérivée dans l'identité (1): on a

$$(\frac{X}{X-z_1})' = \frac{(X-z_1)-X}{(X-z_1)^2} = -\frac{z_1}{(X-z_1)^2},$$

$$\left(\frac{(X-z_2)^m}{X-z_1}\right)' = \frac{m(X-z_2)^{m-1}(X-z_1)-(X-z_2)^m}{(X-z_1)^2} = \frac{(X-z_2)^{m-1}}{(X-z_1)^2}(m(X-z_1)-(X-z_2)),$$

et la dérivée de l'identité (1) s'écrit

$$-\frac{z_1}{(X-z_1)^2} = \beta_{1,1}\frac{(X-z_2)^{m-1}}{(X-z_1)^2}(m(X-z_1)-(X-z_2)) + \beta_{2,1}(m-1)(X-z_2)^{m-2} + \ldots + \beta_{2,m-1}.$$

Evaluer ensuite en z_2:

$$-\frac{z_1}{(z_2-z_1)^2} = \beta_{2,m-1}.$$

Si $m \geq 3$, prendre la dérivée seconde et évaluer en z_2 pour obtenir $\beta_{2,m-2}$, etc.

Pour obtenir $\beta_{1,1}$, multiplier $\frac{R}{S}$ par $(X-z_1)$ et évaluer en z_1:

$$\frac{z_1}{(z_1-z_2)^m} = \beta_{1,1}.$$

Dans l'exemple sur $\mathbf{R}$, $\alpha_{1,1}$ s'obtient comme sur $\mathbf{C}$.
Pour les autres coefficients, utiliser le fait que X^2+bX+c a deux racines $z, \overline{z} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.
Pour obtenir $\beta_{1,m}$ et $\gamma_{1,m}$, multiplier par $(X^2+bX+c)^m$:

$$\frac{X}{(X-a)} = \alpha_{1,1}\frac{(X^2+bX+c)^m}{(X-a)} + (\beta_{1,1}+\gamma_{1,1}X)(X^2+bX+c)^{m-1} + \ldots + (\beta_{1,m}+\gamma_{1,m}X) \quad (2)$$

et évaluer en z:

$$\frac{z}{(z-a)} = \beta_{1,m}+\gamma_{1,m}z.$$

C'est un système de deux équations réelles pour $\beta_{1,m}, \gamma_{1,m} \in \mathbf{R}$.

Ensuite, poursuivre comme dans $\mathbf{C}$, i.e. pour obtenir les coefficients $\beta_{1,i}, \gamma_{1,i}$, $1 \leq i \leq m-1$, dériver l'identité (2) et évaluer en z.

En général, il s'agit de traiter chaque facteur irréductible séparément, en procédant, par exemple, comme on vient de le faire.