Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre automne 2011-2012

Math I - PMI

Feuille d'exercices n° 5

Fonctions réelles à variable réelle

Exercice 1. Déterminer les ensembles de définitions des fonctions :

$$f_1(x) = \frac{x^2+3}{1-|x|} \ ; \quad f_2(x) = \sqrt{x^2+2x+3} \ ; \quad f_3(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \ ; \quad f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}} \ ;$$
$$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4-x^2}} \ ; \quad f_6(x) = \frac{\cos(x)}{1+\sin(2x)} \ ; \quad f_7(x) = \sqrt{2\cos(x)-1} \, .$$

Exercice 2. Trouver les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+x-3}{x-1} \ ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1} \ (n \in \mathbb{N}) \ ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^4+x^3-2}{x^3+x^2-2} \ ; \quad \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x-1-\sqrt{x+1}}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x^2} \ ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}} \ ; \quad \lim_{|x|\to+\infty} x+\sqrt{x^2+1} \ ; \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$$
$$\lim_{x\to 0^+} x^x \ ; \quad \lim_{x\to 1^+} \ln(x)\cdot\ln(\ln(x))$$

Exercice 3. Démontrer que si $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = l'$ alors $\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) = l+l'$.

Exercice 4. Montrer que si $\phi(x) > 0$ et si $\lim_{x\to x_0} \phi(x) = \lambda$, alors $\lambda \geq 0$. En déduire que

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ \lim_{x\to x_0} f(x) = l \\ \lim_{x\to x_0} g(x) = l' \end{cases} \Rightarrow l \leq l' \, .$$

Exercice 5. Etudier la continuité en 0 des fonctions :

$$f_1(x) = x+\sqrt{x^2} \ ; \quad f_2(x) = x - \frac{|x|}{x} \ ; \quad f_3(x) = \frac{1}{1+|x|} \, .$$

Exercice 6. Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sqrt{x} \ ; \quad f_2(x) = xE(x) \ ; \quad f_3(x) = (x-E(x))^2 \ ; \quad f_4(x) = E(x)+(x-E(x))^2 \ ;$$
$$f_5(x) = \frac{x}{x^2-1} \ ; \quad f_6(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x+2}} \, .$$

Exercice 7. Montrer que la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Montrer que la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = 10^{-\frac{1}{(x-3)^2}} & \text{pour } x \neq 3 \\ f(3) = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^3+8}{x+2}$ se prolonge par continuité en -2.

Exercice 10. Soit f une application de $[a,b]$ dans lui-même telle que, pour tout x_1 et x_2 de $[a,b]$, x_1 différent de x_2,

$$|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2| \, .$$

Montrer que f est continue.
En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution. (On pourra étudier la fonction $F(x) = f(x) - x$)

Exercice 11. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient f, g deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in I, (f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0 \, .$$

Montrer que $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice 12. Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto f(x)$ soit croissante et $x \mapsto f(x)/x$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 13. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(x) \, .$$

Montrer que f est constante.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \, .$$

Montrer que f admet un minimum absolu.

Exercice 15. Soient f une application bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 16. Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application continue telle que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l < 1\,.$$

Montrer qu'il existe un $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 17. Soit $f : [0; +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction croissante et positive. On suppose qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) < x_0$. Montrer qu'il existe y tel que $f(y) = y$.

Exercice 18. Un train part de Bordeaux à 8h02 et arrive à Paris-Montparnasse à 12h02. Il s'est arrêté 1 minutes à Angoulème à 9h13 et 59 secondes à St Pierre des Corps à 10h58. La distance parcourue est de 600 km. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une durée de 2 heures durant lequel le train a parcouru exactement 300 km.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
On considère l'application polynomiale f_n définie par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$. Calculer α_2.
2. Montrer que la suite (α_n) est décroissante et convergente. (Etudier $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_n(\alpha_n)$)
3. Calculer la limite des α_n^n. En déduire la limite des α_n.

Exercice 20. 0n pose $f_n(x) = x^n - \lambda(1 - x^3)$, avec $\lambda > 0$.

1. Montrer que f_n s'annule une unique fois sur $]0, 1[$. On note α_n cette valeur.
2. Prouver que $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_n(\alpha_n) < 0$. En déduire que (α_n) est monotone.
3. Montrer que la suite (α_n) est convergente. Calculer sa limite.

Exercice 21. Soit h une application continue de $[0, 1]$ dans $]0, 1[$.

1. Montrer que l'équation $h(x) = x^n$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$.
   On suppose dans ce qui suit que h est strictement décroissante.
2. Montrer que la solution de $h(x) = x^n$ est unique dans $]0, 1[$. On note α_n cette valeur et $\beta_n = h(\alpha_n)$.
3. Monter que la suite (α_n) est strictement croissante et que la suite (β_n) est strictement décroissante.
4. En déduire que ces suites sont convergentes et déterminer leur limite.

Exercice 22. Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $[1, n]$, notée u_n, pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante non majorée. Que peut-on en conclure ?
3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $0 < n - \ln(n) \leq u_n$.
4. Déterminer les limites de $\left(\dfrac{u_n - n}{n}\right)$, $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ et $(u_n - n + \ln(n))$.

Exercice 23. Soient f et g deux applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout x de $[0,1]$:

$$0 < f(x) < g(x)\,.$$

1. Pour tout x de $[0,1]$, on pose $h(x) = f(x)/g(x)$.
   Montrer que l'application h est continue de $[0,1]$ dans $]0,1[$.
2. Montrer qu'il existe deux réels α et β de $[0,1]$, tels que pour tout x de $[0,1]$,
   $$0 < h(\alpha) \leq h(x) \leq h(\beta) < 1\,.$$
3. Monter que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'équation
   $$h(x) = x^n\,, \tag{1}$$
   possède au moins une solution $]0,1[$.
4. On suppose de plus, dans tout ce qui suit, que h est strictement décroissante.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (1) ci-dessus possède alors une unique solution $a_n \in\,]0,1[$. On pose $b_n = h(a_n)$.
   (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ainsi obtenue, est strictement croissante, et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
   (c) En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et déterminer les limites.

Exercice 24. Pour chacune des propositions, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier cette réponse par une démonstation ou un contre-exemple

1. Si $f :]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ est une fonction strictement décroissante, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. Si $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue et si $f(x) \neq 0$ pour tout x de $[a,b]$, alors il existe un réel $m > 0$ tel que :
   $$(\ \forall x \in [a,b]\,, f(x) \geq m\ ) \quad \text{ou} \quad (\ \forall x \in [a,b]\,, f(x) \leq -m\ )\,.$$
3. Il existe une application continue bijective de $[0,1[$ sur $]0,1[$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(x) = x$ pour tout rationnel x, alors $f(x) = x$ pour tout réel.
5. Il existe une fonction f telle que f soit discontinue en tout point de $\mathbb{R}$ et telle que $f \circ f$ soit continue en tout point de $\mathbb{R}$.