Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2012-2013
Math IV - PMI - Algèbre

Feuille d'exercices numéro 10
Géométrie affine (III) - Coniques

Dans cette feuille d'exercices, on se place dans un plan affine euclidien E muni d'un repère orthonormé (direct) $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Pour six réels a, b, c, d, e et f on notera :

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

et on notera $\mathcal{C}$ l'ensemble des points de E dont une équation dans le repère donné est $q(x, y) = 0$.

Exercice 1
(Comment faire tourner intelligemment les axes du repère).
On note R_θ la rotation d'angle θ, $\vec{i}_\theta = R_\theta(\vec{i})$ et $\vec{j}_\theta = R_\theta(\vec{j})$.
1) Quelle est la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j})$ à $(\vec{i}_\theta, \vec{j}_\theta)$?
2) Quelles relations lient les coordonnées (x, y) d'un point dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et les coordonnées (s, t) de ce même point dans $(O, \vec{i}_\theta, \vec{j}_\theta)$?
3) a) Montrer par un calcul explicite qu'il est possible de choisir θde façon à ce que l'équation de la conique $\mathcal{C}$ dans $(O, \vec{i}_\theta, \vec{j}_\theta)$ ne contienne pas de terme en st.
b) On note $\alpha s^2 + 2\beta st + \gamma t^2$ la partie quadratique de l'équation de $\mathcal{C}$ dans $(O, \vec{i}_\theta, \vec{j}_\theta)$. Quelle relation matricielle lie la matrice P de R_θ et les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} ?$$

Retrouver le résultat du a) sans calcul explicite de θ en se fondant sur le théorème de diagonalisation des matrices symétriques réelles.
Peut-on utiliser cette méthode pour simplifier de la même façon les équations des quadriques en dimension 3 voire en dimension plus grande ?

Exercice 2
(Comment modifier intelligemment l'origine du repère).
On dira que O est un **centre** pour la conique lorsque $d = e = 0$.
1) Montrer que si O est un centre, c'est aussi un centre de symétrie pour $\mathcal{C}$.
2) Dans cette question, on suppose que $b = 0$, que $a \neq 0$ et $c \neq 0$. Expliciter un centre pour la conique $\mathcal{C}$.
3) Justifier plus ou moins proprement que Ω est un centre pour la conique si et seulement si :

$$\frac{\partial q}{\partial x}(\Omega) = \frac{\partial q}{\partial y}(\Omega) = 0.$$

Exercice 3
(recopié sans vergogne depuis Géométrie 700 exercices résolus de J.-M. Monier, Dunod 1993, p. 36-37).
Déterminer une équation aussi simple que possible puis la nature des coniques suivantes ; quand on en aura marre on se contentera de préciser la nature en faisant le moins de calculs possibles pour ça :
a) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$ b) $x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0$
c) $2x^2 + xy + y^2 + 4x - y - 2 = 0$ d) $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 50 = 0$
e) $x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$ f) $5x^2 + 2xy\sqrt{3} + 7y^2 - (10 + 2\sqrt{3})x - (14 + 2\sqrt{3})y - 4 + 2\sqrt{3} = 0$
g) $xy + 3x + 5y - 4 = 0$ h) $13x^2 - 32xy + 37y^2 - 2x + 14y - 5 = 0$
i) $x^2 + xy + y^2 + x - y = 0$ j) $52x^2 - 72xy + 73y^2 + 176x - 218y + 97 = 0$
k) $4x^2 - 4xy + y^2 - x - y + 1 = 0$ l) $x^2 - 2xy + y^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + 2(1 - \sqrt{2})y + 1 + 2\sqrt{2} = 0$
m) $3x^2 - 2xy\sqrt{3} + y^2 + 2y\sqrt{3} - 1 = 0$ n) $108x^2 + 312xy + 17y^2 - 840x - 380y - 100 = 0$
o) $x^2 - 2xy\cos\alpha + y^2 + x + y - 1 = 0$ p) $x^2 - 2xy \operatorname{ch} p + y^2 + x + y - 1 = 0$
q) $(\lambda^2 - 1)x^2 - 2\lambda xy + y^2 + 2x + 3 = 0$r) $(1 + \lambda)(x^2 + y^2) + 2(1 - \lambda)xy - 4\lambda y + 1 = 0$
Pour les quatre dernières, on attend une discussion en fonction du paramètre.