Exercice 18
Soit $n \geq 1$ un entier et A une matrice carrée (n,n) à coefficients réels.
On suppose que :

$$A^3 - 3A^2 - A + 3I = 0.$$

Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 19
Soit $\mathbf{K}$ un corps, $n \geq 1$ un entier et A une matrice carrée (n,n) sur ce corps.
On note $\mathbf{K}[A]$ l'ensemble des $P(A)$ où P parcourt $\mathbf{K}[X]$.

1) Montrer que pour toutes matrices B et C dans $\mathbf{K}[A]$, le produit BC est encore dans $\mathbf{K}[A]$ et que B et C commutent.

2) a) Montrer que $\mathbf{K}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
b) On note d le degré du polynôme minimal de A.
Montrer que $(I, A, A^2, \ldots, A^{d-1})$ est libre.
Par un argument de division euclidienne, montrer que $(I, A, A^2, \ldots, A^{d-1})$ engendre $\mathbf{K}[A]$, et conclure que $\mathbf{K}[A]$ est de dimension d.

Exercice 20
1) a) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ et soit x, $y \in \mathbf{C}^*$. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & y \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.
b) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$. Montrer que si elles ont même polynôme caractéristique et même polynôme minimal, elles sont semblables.

2) Dans $\mathcal{M}_4(\mathbf{C})$ on considère les deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer leurs rangs, leurs polynômes caractéristiques, leurs polynômes minimaux. Sont-elles semblables ?

3) (Relativement difficile sans indications, et on n'en donne pas...) Et en dimension 3 ça donne quoi ?

Exercice 21
Soit $\mathbf{K}$ un corps et $n \geq 1$ un entier. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?
Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$:
* $P_{A-\alpha I} = P_A(X - \alpha)$;
* $P_{A-\alpha I} = P_A(X + \alpha)$;
* $m_{A-\alpha I} = m_A(X - \alpha)$;
* $m_{A-\alpha I} = m_A(X + \alpha)$.

Exercice 22
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ sur un corps $\mathbf{K}$.
Un endomorphisme u de E est dit **cyclique** lorsqu'il existe un vecteur x pour lequel la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

1) Soit u un endomorphisme cyclique. Écrire la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

2) Après avoir explicité le polynôme caractéristique de la matrice écrite à la question précédente, utiliser ce calcul pour montrer que pour tout polynôme unitaire Q de degré n il existe un endomorphisme cyclique u de E dont le polynôme caractéristique est $(-1)^n Q$.

3) Soit u un endomorphisme cyclique. Montrer que son polynôme minimal est égal (au signe près) à son polynôme caractéristique.