

Chap II

Les nombres complexes

I Le corps \mathbb{C}

1) Construction

Le corps des nombres complexes est l'ensemble formé des nombres $a+ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et i est une quantité qui vérifie $i^2 = -1$. Les opérations + et \times sur \mathbb{C} sont alors définies de manière usuelle :

$$(a+ib) + (a'+ib') = (a+a') + i(b+b')$$

$$(a+ib) \times (a'+ib') = (aa'-bb') + i(ab' + a'b)$$

Une manière explicite de construire un tel ensemble est de le définir comme l'ensemble des couples (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$, muni d'une loi + et d'une loi \times définie par :

$$(a, b) + (a', b') = (a+a', b+b')$$

$$(a, b) \times (a', b') = (aa'-bb', ab' + a'b)$$

On montre alors : (à faire)

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

$$(a, 0) = (a, 0) \times (1, 0), (a, 0)(b, 0) = (ab, 0), (a, 0) + (b, 0) = (a+b, 0)$$

$$(0, b) = (b, 0) \times (0, 1)$$

$$(0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0)$$

Les $(a, 0)$ sont en fait exactement comme \mathbb{R} . On les note a , tout court.

L'élément $(0,1)$ est noté i . Ainsi, tout élément de \mathbb{C} s'écrit ainsi et on a $i^2 = -1$... etc.

Si $z = a+ib \in \mathbb{C}$, on dit que a est la partie réelle de z , on note sa $a = \operatorname{Re}(z)$ et que b est la partie imaginaire de z , notée $b = \operatorname{Im}(z)$. Attention ! $\operatorname{Im}(z)$ est un réel !

Propriétés

$\forall z, z' \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{Re}(z+z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z'), \quad \operatorname{Im}(z+z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$$

$$\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z')$$

$$\operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z') + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(z').$$

Proposition

Tout élément $z \in \mathbb{C}$, autre que 0 , est inversible pour la multiplication. L'inverse de $z = a+ib$ est

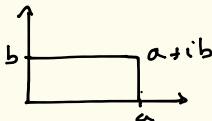
$$\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

Dém

$$\frac{a-ib}{a^2+b^2} \cdot (a+ib) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \right) + i \left(\frac{ab-ba}{a^2+b^2} \right) = 1+i0 = 1.$$

2) Le plan complexe

À chaque $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on associe un point $\Pi(z) = (a, b)$ dans le plan \mathbb{R}^2 . Ce point $\Pi(z)$ est le point d'affixe z .



Le vecteur d'affixe z est le vecteur $\vec{v}(z) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Si \vec{u} est d'affixe z et \vec{v} d'affixe z' , alors $\vec{u} + \vec{v}$ est d'affixe $z + z'$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda \vec{u}$ est d'affixe λz .

Π est d'affixe z si \overrightarrow{OP} est d'affixe z .

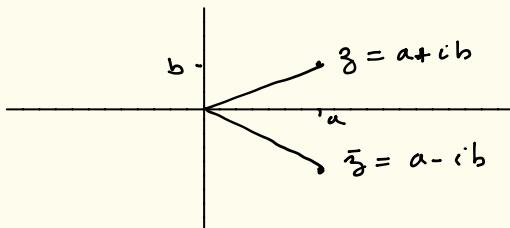
Si Π est d'affixe z et Π' d'affixe z' , alors $\overrightarrow{\Pi\Pi'}$ est d'affixe $z' - z$.

Si Π est d'affixe z alors Π' d'affixe $-z$ est le symétrique de Π par rapport à O .

3) Conjugaison

Le conjugué de z est $\bar{z} = a - ib$.

Le point d'affixe \bar{z} est le sym. de $\Pi(z)$ par rapport à Ox .



Proposition

$$\overline{\bar{z}} = z$$

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

$$\overline{zz'} = \bar{z} \bar{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

z est réel si $\bar{z} = z$

z est imaginaire pur si $\bar{z} = -z$

Tout est facile et laisse en exercice.

4) Module

Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$, on note

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}, \text{ c'est le } \underline{\text{module}} \text{ de } z$$

Il s'agit donc de la longueur de ON , où N est d'affixe z .

Notez que quand z est réel, $|z|$ correspond à la valeur absolue de z , donc les notations sont cohérentes.

Proposition

On a $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$

Si $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ alors $z=z' \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$

$$|z|^2 = \bar{z}z = |\bar{z}|^2$$

$$|zz'| = |z||z'|$$

$$\text{Si } z \neq 0, \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}.$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, |z^n| = |z|^n.$$

A faire.

Proposition (Inégalité triangulaire)

$\forall z, z' \in \mathbb{C}$, on a

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|,$$

avec égalité si et seulement si $z' = \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$, ou $z=0$.

$$|z-z'| \geq | |z| - |z'| |.$$

Dém

Pour commencer nous allons montrer que $\forall u \in \mathbb{C}$

$$|1+u| \leq 1+|u|, \text{ avec égalité si } u \in \mathbb{R}^+.$$

$$\begin{aligned} \text{On a } u &= a+ib \text{ et donc } |1+u|^2 = (1+a)^2 + b^2 = 1+a^2 + 2a + b^2 \\ &= 1+2a+|u|^2 \end{aligned}$$

Comme $a = \operatorname{Re}(u) \leq |\operatorname{Re}(u)| \leq |u|$ on obtient

$$|1+u|^2 \leq 1 + 2|u| + |u|^2 = (1+|u|)^2.$$

Comme les quantités sous les carrés sont réelles ≥ 0 c'est \Leftrightarrow à

$$|1+u| \leq 1+|u|.$$

Le cas d'égalité correspond à $a = |u|$, ce qui implique $b=0$ et $a \geq 0$, d'où $u \in \mathbb{R}^+$.

Montons le cas général maintenant. On a, si $z \neq 0$

$$|z+z'| = |z| \left| 1 + \frac{z'}{|z|} \right| \leq |z| \left(1 + \left| \frac{z'}{|z|} \right| \right) \text{ d'après ce qu'on vient de faire,}$$
$$= |z| + |z'|.$$

Avec égalitéssi $\frac{z'}{|z|} \in \mathbb{R}^+$. Ce qui était annoncé!

Si $z=0$ alors $|z+z'| = |z| + |z'|$ de manière évidente.

D'où la première partie.

Enfin $|z| = |z-z'+z'| \leq |z-z'| + |z'|$. Donc $|z-z'| \geq |z|-|z'|$.

De la même façon $|z-z'| \geq |z'|-|z|$. Donc on a $|z-z'| \geq |z|-|z'|$. ■

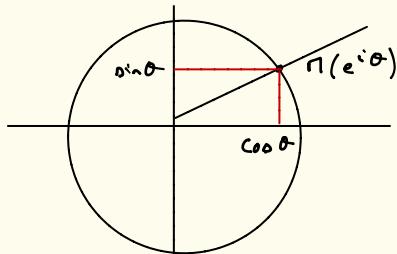
5) Argument

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta}$$

C'est juste une notation pour le moment !

Le point Π d'affixe $e^{i\theta}$ est sur le cercle trigonométrique.



Quelques cas à retenir:

- $e^{i0} = 1$
- $e^{i\pi/2} = i$
- $e^{i\pi} = -1$ (Histoire d'Euler).
- $e^{2i\pi} = 1$

Proposition

- $\forall \theta \in \mathbb{R},$
- $|e^{i\theta}| = 1$
 - $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.
 - $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta' \bmod 2\pi$
 - $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
 - $(e^{i\theta})^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta), \forall n \in \mathbb{Z}.$

Dem

- $|e^{i\theta}| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
- $\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{1} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.
- Si $\theta' = \theta + 2k\pi$ alors $e^{i\theta'} = \cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi) = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.
Inversement, si $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ alors $\begin{cases} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \theta' \bmod 2\pi$.
- $e^{i\theta} e^{i\theta'} = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$
 $= (\cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta') + i(\cos\theta \sin\theta' + \cos\theta' \sin\theta)$
 $= \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$
 $= e^{i(\theta + \theta')}$.
- $(e^{i\theta})^n$ vient tout seul avec le résultat précédent. \blacksquare

Théorème

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|=1$, il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$
tel que $z = e^{i\theta}$.

Dem

L'unicité vient du résultat ci-dessus : $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta = \theta' \bmod 2\pi$.
Reste à voir l'existence : On a $z = a + ib$ avec $a^2 + b^2 = 1$. En particulier $a \in [0, 1]$ et donc $a \in [-1, 1]$. Il existe donc

$\theta \in [0, \pi]$ tel que $a = \cos \theta$. Ensuite on a $b^2 = 1 - a^2$, donc $b^2 = \sin^2 \theta$, ce qui veut dire que $b = \pm \sin \theta$.

Si $b = \sin \theta$, alors $z = e^{i\theta}$; si $b = -\sin \theta$, alors $z = e^{i(\theta + \pi)}$.
D'où le résultat, dans tous les cas.

On obtient $\theta' \in [0, 2\pi]$. On peut éliminer le cas 2π qui correspond au cas 0. \square

Théorème

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$z = |z| e^{i\theta}.$$

Dém.

Si $z \neq 0$ alors $|z| \neq 0$, on pose $w = \frac{z}{|z|}$, on a donc $|w|=1$ et du coup la forme $w = e^{i\theta}$. \square

θ est un argument de z . Tout θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est un argument de z . Le seul qui vérifie $\theta \in [0, 2\pi[$ est l'argument principal de z , on le note $\text{Arg}(z)$.

Quel est l'argument de $1+i$?

$$z = 1+i, |z| = \sqrt{2} \text{ donc } z = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)$$

L'argument de $\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$ est l'unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

C'est donc $\theta = \pi/4$. D'où finalement

$$1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

La forme $z=|z|e^{i\theta}$ est la forme trigonométrique de z .

Proposition

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \bmod 2\pi$$

$$\arg(z_1 z') = \arg(z) + \arg(z') \bmod 2\pi$$

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi \bmod 2\pi$$

$$\arg(1/z) = -\arg(z) \bmod 2\pi$$

$$\arg(z^n) = n \arg(z) \bmod 2\pi, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Pour $z = a+ib \in \mathbb{C}$, on pose

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Dans le cas où z est réel, i.e. $z=a$, on retrouve $e^z = e^a$ au sens habituel.

Dans le cas $z=ib$, on a $e^z = e^{ib}$ au sens défini plus haut.

Théorème

$$\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$$

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

$$e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \frac{1}{e^z} = e^{-z}.$$

Et enfin $e^3 = e^{3'} \Leftrightarrow z = 3' + 2ik\pi$.
 (Tout en exercices).

II Equations du 2nd degré dans C

1) Racines d'un nombre complexe.

Théorème

Pour z fixé $\in \mathbb{C}^*$, il existe exactement 2 solutions Z à l'équation $Z^2 = z$. Si $z = p e^{i\theta}$, alors les 2 solutions sont

$$Z = \pm \sqrt{p} e^{i\theta/2}$$

Dém

Si $z = p e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ et si $Z = \pm \sqrt{p} e^{i\theta/2}$ alors $Z^2 = p e^{i\theta} = z$.

Reste à voir que ce sont les seules solutions. Si $Z = re^{i\alpha}$ vérifie $Z^2 = z$ alors $r^2 e^{2i\alpha} = p e^{i\theta}$. En particulier $r^2 = p$ et $2\alpha = \theta \pmod{2\pi}$. D'où $r = \pm \sqrt{p}$ et $\alpha = \frac{\theta}{2} + k\pi$. Cela donne $Z = \pm \sqrt{p} e^{i\theta/2} e^{ik\pi}$, mais comme $e^{ik\pi} = \pm 1$, cela donne la forme annoncée. \blacksquare

Par exemple: pour résoudre $Z^2 = 1+i$, on met $1+i$ sous forme trig: $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$, d'où $Z = \sqrt{2} e^{i\pi/8}$.

Autre méthode: on pose $Z = a+ib$ et on résout $Z^2 = 1+i$, ce qui donne $(a^2-b^2)+2iab = 1+i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=1 \\ 2ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2b} & (b \neq 0 \text{ car sinon } 2ab=1 \text{ est impossible}) \\ \frac{1}{4b^2}-b^2=1 \end{cases}$$

$$\text{d'où } 1 - 4b^2 = 4b^2. \text{ On résout: } B = b^2 \Rightarrow 4B^2 + 4B - 1 = 0$$

$$\Delta = 32 \quad B = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{8}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow B = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$ car seule solution ≥ 0 .

et $b = \pm \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}}$. Donc $a = \dots$ etc.

Les deux solutions de $z^2 = z$ sont appelées les racines carrées de z .

On les note $\pm \sqrt{z}$. Noter qu'il n'y a pas, comme sur \mathbb{R}^+ , de choix privilégié pour savoir laquelle des deux solutions est notée \sqrt{z} .

2) Équations du 2nd degré à coefficients complexes.

Théorème

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}, a \neq 0$.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ ($\Delta \in \mathbb{C} !$) et on note $\sqrt{\Delta}$ une des deux racines carrées de Δ . Alors les solutions sont $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$, l'unique solution est $-\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta \neq 0$ et si z_1, z_2 sont les 2 solutions, alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

Si $\Delta = 0$ et z_0 est la seule solution, alors $az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$.

Dém

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Ca vaut 0 si et seulement si $(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow (z + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

 $\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$

Le cas $\Delta = 0$ est facile.

Enfin, $a(z - z_1)(z - z_2) = a\left(z - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

 $= a\left(z^2 - \left(\frac{-b}{a}\right)z + \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}\right)$
 $= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right). \quad \square$

3) Racines n -ièmes de l'unité.

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $z^n = 1$ admet exactement n solutions dans \mathbb{C} , qui sont

$$z = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dém

Si $z = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$ alors $z^n = e^{i \frac{2k\pi}{n} \cdot n} = 1$. Reste à voir que ce sont les seules. Si $z = g e^{i\theta}$ vérifie $z^n = 1$ alors $g^n e^{in\theta} = 1$. Ce qui implique $\begin{cases} g^n = 1 \\ n\theta = 0 \text{ mod } 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g^n = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

Si n est impair, alors $g = 1$ et $z = e^{i \frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}$. Mais toutes les solutions avec $k \neq 0, \dots, n-1$, retombent sur une solution avec

$k \in \{0, \dots, n-1\}$

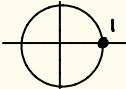
Si n est pair, alors $\gamma = \pm 1$ et $\theta = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$
 $= \frac{k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \quad (n=2n')$.

$$z = e^{i2k\pi/n} \text{ ou } -e^{i2k\pi/n} = e^{i\pi} e^{i2k\pi/n} = e^{i(2k+n)\pi/n} = e^{i2(k+n')\pi/n}$$

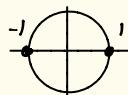
Ce qui revient au même.

Exemples fondamentaux:

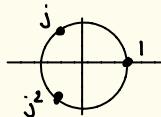
Pour $n=1 \Rightarrow z=1$



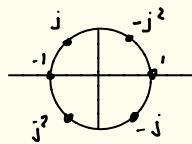
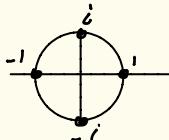
Pour $n=2 \Rightarrow z = e^0, e^{i\pi} = 1, -1$



Pour $n=3, z = 1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}$
 $= 1, j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, j^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.



Pour $n=4: 1, i, -1, -i$



Pour $n=6: 1, -j^2, j, -1, j^2, -j$

Retourn au cas général. Les solutions $z_k = e^{i2k\pi/n}, k=0, \dots, n-1$

sont notées w_0, w_1, \dots, w_{n-1}

Proposition

- $\overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$
- $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0, n \geq 2$

Derm

$$\omega_k = e^{2ik\pi/n} \Rightarrow \overline{\omega_k} = e^{-2ik\pi/n} = e^{i2n\pi/n} e^{-2ik\pi/n} = e^{i2(n-k)\pi/n}.$$

So if $S = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k$, along $\omega_1, S = \omega_1 + \dots + \omega_{n-1} + 1 = S$. Then $S=0$ can
 $\omega_1 \neq 1$.

