Chapitre 3

Applications linéaires

3.1 Définition ; noyau et image d'une application linéaire

Définition 3.1. Soit $\mathbb{K}$ un corps et E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une fonction $\varphi \colon E \to F$ est une *application linéaire* si on a :
- $\varphi(0) = 0$.
- Pour tout $u, v \in E$ $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$.
- Pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ $\varphi(\lambda u) = \lambda\varphi(u)$.

Cette définition pourrait s'énoncer de manière beaucoup plus condensée, comme la définition d'un sous-espace vectoriel : $\varphi \colon E \to F$ est une application linéaire si, et seulement si,

$$\forall u, v \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \varphi(\lambda u + v) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v) \ .$$

Une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels est souvent appelée un *morphisme* de E vers F ; si $E = F$ on parle d'*endomorphisme*.

Notons que si $\varphi, \psi \colon E \to F$ sont des applications linéaires et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\varphi + \lambda\psi$ est encore une application linéaire. On voit ainsi que l'espace des applications linéaires est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions de E dans F. Ci-dessous, on utilisera simplement le fait que si φ, ψ sont des applications linéaires alors $\varphi - \psi$ est aussi une application linéaire.

Vous avez déjà rencontré énormément d'applications linéaires !

Exemple.
1. Les applications $x \mapsto ax$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) ; $(x, y) \mapsto ax + by$ (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$) ou $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \ldots a_nx_n$ (de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$) sont des applications linéaires.
2. Plus généralement, si $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ alors on a une application linéaire $\varphi \colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ définie par
$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) = \left(\sum_{k=1}^{m} a_{1,k}x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}x_k \right) \ .$$
On verra dans ce chapitre que toute application linéaire de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathbb{K}^n$ est de cette forme.
3. La dérivation de polynômes peut être vue comme une application linéaire $D \colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$. Notons que cette application est surjective : pour tout polynôme P il existe un polynôme Q tel que $Q' = P$. Mais elle n'est pas injective : on a $D(1) = D(0) = 0$ mais $1 \neq 0$.
4. Sur l'espace des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on peut considérer l'application S qui décale les indices d'une suite : $S(u)$ est la suite définie par $S(u)(n) = u(n+1)$. De nouveau cette application est surjective mais pas injective.
5. Toujours sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on peut considérer l'application T qui à une suite u associe la suite $T(u)$ définie par $T(u)(0) = 0$, et $T(u)(n) = u(n-1)$ pour $n \geq 1$. Cette fois T est injective mais n'est pas surjective : une suite v telle que $v(0) \neq 0$ n'est pas dans l'image de T. Notons que pour toutes suites u, v on a $S \circ T(u) = u$; pourtant,
$$T \circ S(u) = n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ u(n) & \text{sinon} \end{cases} \ .$$
donc $T \circ S(u)$ est différent de u alors que $S \circ T(u) = u$!

6. Si on note E l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, l'application qui à f associe
$$I(f)\colon x \mapsto \int_0^x f(t)dt$$
est une application linéaire de E dans E. Cette application est injective (si deux fonctions continues ont une primitive commune, elles sont égales) mais pas surjective (toutes les fonctions continues ne sont pas dérivables).

Les exemples 3 à 6 ci-dessus illustrent des phénomènes qui ne peuvent se produire quand on a affaire à des endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie ; dans ce cours on va continuer à se concentrer sur le cas de la dimension finie.

Définition 3.2. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi\colon E \to F$ une application linéaire.

- Le *noyau* de φ, noté $\ker(\varphi)$, est défini par
$$\ker(\varphi) = \{x \in E\colon \varphi(x) = 0\} \ .$$
- On note $\mathrm{Im}(\varphi)$ l'image de E par φ ; rappelons que par définition d'une image on a
$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{y \in F\colon \exists x \in E \ \varphi(x) = y\} \ .$$

Proposition 3.3. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi\colon E \to F$ une application linéaire. Alors $\ker(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E, et $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration. Commençons par le noyau : il est non vide puisque $\varphi(0) = 0$ donc $0 \in \ker(\varphi)$. Ensuite, soit $u, v \in \ker(\varphi)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a
$$\varphi(\lambda u + v) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v) = \lambda 0 + 0 = 0 \ .$$
Donc $\lambda u + v \in \ker(\varphi)$, et $\ker(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel.

Passons à $\mathrm{Im}(\varphi)$: de nouveau il est non vide puisque $0 = \varphi(0) \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Si y_1, y_2 appartiennent à $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{K}$ tels que $\varphi(x_1) = y_1$ et $\varphi(x_2) = y_2$. Alors on a
$$\lambda y_1 + y_2 = \lambda\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(\lambda x_1 + x_2) \in \mathrm{Im}(\varphi) \ .$$
□

Définition 3.4. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $\varphi\colon E \to F$. Le *rang* de φ est la dimension de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Proposition 3.5. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi\colon E \to F$ une application linéaire. Alors pout tout $x_1, \dots, x_n \in E$ on a*
$$\varphi(\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)) = \mathrm{Vect}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)) \ .$$
En particulier, si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice de E, alors $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Démonstration. Notons pour commencer que $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)$ appartiennent bien à l'espace $\varphi(\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n))$. Reste à montrer que ces vecteurs en forment une partie génératrice.

Soit $y \in \varphi(\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n))$. On peut trouver $x \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ tel que $\varphi(x) = y$; et il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Alors on a
$$\begin{aligned} y &= \varphi(x) \\ &= \varphi(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(x_i) \ . \end{aligned}$$
On vient de montrer que $y \in \mathrm{Vect}(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$, qui est donc bien une famille génératrice de $\varphi(\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n))$.
□

Exercice 3.6. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi\colon E \to F$ une application linéaire. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. φ est surjective.
2. Pour toute famille génératrice $(x_1, \dots, x_n)$ de E, $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ est une famille génératrice de F.
3. Il existe une famille génératrice $(x_1, \dots, x_n)$ de E telle que $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ est une famille génératrice de F.

Proposition 3.7. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $\varphi\colon E \to F$. Alors on a* $\operatorname{rang}(\varphi) \leq \dim(E)$.

En effet, si $n = \dim(E) \geq 1$, alors E a une famille génératrice à n vecteurs ; d'après la propriété précédente, l'image de cette partie est une partie génératrice de $\operatorname{Im}(\varphi)$ contenant n vecteurs, donc la dimension de $\operatorname{Im}(\varphi)$ doit être inférieure à n. Et si $\dim(E) = 0$, alors $E = \{0\}$ et $\operatorname{Im}(\varphi) = \{0\}$ est aussi de dimension 0.

Proposition 3.8. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi\colon E \to F$ une application linéaire. Alors φ est injective si, et seulement si,* $\ker(\varphi) = \{0\}$.

Démonstration. Supposons φ injective, et que $x \in E$ est tel que $\varphi(x) = 0$. Alors on a $\varphi(x) = \varphi(0)$, et comme φ est injective on en déduit $x = 0$. Par conséquent si φ est injective on a $\ker(\varphi) = \{0\}$.

Réciproquement, supposons $\ker(\varphi) = \{0\}$, et que $x, y \in E$ sont tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Alors on a $0 = \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y)$, par conséquent $x - y \in \ker(\varphi)$ et donc $x - y = 0$, c'est-à-dire $x = y$. on vient de montrer que φ est injective. □

Proposition 3.9. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi\colon E \to F$ une application linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *φ est injective.*
2. *Pour toute famille libre $(x_1, \dots, x_n)$ de E la famille $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ est libre dans F.*
3. *Il existe une base $(x_1, \dots, x_n)$ de E telle que la famille $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ est libre dans F.*

Démonstration. Supposons que φ est injective et que $x_1, \dots, x_n$ est une famille libre dans E. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1\varphi(x_1) + \dots \lambda_n\varphi(x_n) = 0$.

On utilise tout d'abord la linéarité de φ pour voir que $\varphi(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = 0$; puis comme φ est injective on en déduit que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$. Enfin, comme $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on conclut que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. On vient de montrer que $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ est libre. Il est clair que la deuxième propriété est plus forte que la troisième ; reste à montrer que la troisième implique la première. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base de E telle que $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ soit libre, et $x \in \ker(\varphi)$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Et on a $0 = \varphi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x_i)$.

Comme $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ est libre, on en déduit $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, donc $x = 0$. On vient de montrer que $\ker(\varphi) = \{0\}$: φ est injective. □

Corollaire 3.10. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $\varphi\colon E \to F$ une application linéaire. Si φ est injective alors l'image d'une base de E est une base de $\operatorname{Im}(\varphi)$, et en particulier $\operatorname{rang}(\varphi) = \dim(E)$. Réciproquement, si $\operatorname{rang}(\varphi) = \dim(E)$ alors φ est injective.

Démonstration. On sait que l'image d'une partie génératrice de E est une partie génératrice de $\operatorname{Im}(\varphi)$; et si φ est injective alors l'image d'une famille libre est encore libre. Par conséquent, si φ est injective l'image d'une base de E est une partie à la fois libre et génératrice de $\operatorname{Im}(\varphi)$, autrement dit une base de $\operatorname{Im}(\varphi)$.

Réciproquement, supposons que $\operatorname{rang}(\varphi) = \dim(E) = n$ et considérons une base $(x_1, \dots, x_n)$ de E : la famille $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ est génératrice de $\operatorname{Im}(\varphi)$, et a n éléments ; comme $n = \operatorname{rang}(\varphi) = \dim(\operatorname{Im}(\varphi))$, $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ doit être une base de $\operatorname{Im}(\varphi)$. En particulier on vient de trouver une famille libre dont l'image est une famille libre, donc φ est injective. □

Définition 3.11. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $\varphi\colon E \to F$ une application linéaire. Si φ est bijective on dit que φ est un *isomorphisme* de E sur F. Si de plus $E = F$ alors on dit que φ est un *automorphisme*.

Théorème 3.12. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $\varphi \colon E \to F$. Si φ est un isomorphisme de E sur F alors $\dim(E) = \dim(F)$.*

Si $\dim(E) = \dim(F)$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *φ est bijective.*
2. *φ est injective.*
3. *φ est surjective.*

Toutes ces propriétés sont aussi équivalentes à dire que φ envoie une base de E sur une base de F. Ce théorème peut être vu comme un cas particulier du théorème du rang qu'on verra dans la prochaine section.

Démonstration. Si φ est un isomorphisme, alors φ est injective et donc $\mathrm{rang}(\varphi) = \dim(E)$; mais φ est aussi surjective donc $\mathrm{rang}(\varphi) = \dim(F)$. Par conséquent, on doit bien avoir $\dim(E) = \dim(F)$ s'il existe un isomorphisme de E sur φ. Supposons maintenant que $\dim(E) = \dim(F)$ et montrons que les propriétés (1), (2) et (3) sont équivalentes. Manifestement, (1) est plus forte que (2) et (3). Notons dans la suite $n = \dim(E) = \dim(F)$.

Supposons φ injective, et soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base de E. Alors, d'après 3.9, on sait que $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ est une famille libre de F, et cette famille libre a $n = \dim(F)$ éléments. C'est donc une base. On vient de montrer que l'image d'une base de E est une base de F : φ est bijective.

Reste à montrer que si φ est surjective alors φ est bijective ; le raisonnement est très proche du précédent : si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E alors 3.6, on sait que $(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ est une famille génératrice de F, et cette famille génératrice a $n = \dim(F)$ éléments. C'est donc une base. On vient de montrer que l'image d'une base de E est une base de F : φ est bijective. □

En particulier : il ne peut y avoir d'isomorphisme entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ que si $n = m$; et une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans lui-même est bijective ssi elle est injective ssi elle est surjective.

3.2 Le théorème du rang

Lemme 3.13. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $\varphi \colon E \to F$ une application linéaire. Supposons que $E = \ker(\varphi) \oplus H$. Alors la restriction de φ à H induit un isomorphisme de H sur $\mathrm{Im}(\varphi)$.*

Démonstration. Commençons par montrer que la restriction de φ à H est injective : si x appartient à son noyau, alors on a à la fois $\varphi(x) = 0$ et $x \in H$; autrement dit, $x \in \ker(\varphi) \cap H = \{0\}$ puisque H et $\ker(\varphi)$ sont en somme directe.

Pour montrer que l'application est surjective de H sur $\mathrm{Im}(\varphi)$, considérons $y \in \mathrm{Im}(\varphi)$; il existe $x \in E$ tel que $\varphi(x) = y$, et puisque $\ker(\varphi) \oplus H = E$ on peut écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \ker(\varphi)$ et $x_2 \in H$. Mais alors on a

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = 0 + \varphi(x_2) = \varphi(x_2) \ .$$

Par conséquent y appartient à l'image de H par φ, ce qu'on souhaitait démontrer. □

Théorème 3.14 (Théorème du rang)**.** *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $\varphi \colon E \to F$ une application linéaire. Alors on a*

$$\mathrm{rang}(\varphi) + \dim(\ker(\varphi)) = \dim(E) \ .$$

En particulier, si $\dim(E) < \dim(F)$ alors φ ne peut pas être surjective ; et si $\dim(E) > \dim(F)$ alors son noyau ne peut pas être réduit à $\{0\}$, donc φ ne peut pas être injective.

Démonstration. Comme E est de dimension finie et $\ker(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E, on peut trouver un supplémentaire H de $\ker(\varphi)$ dans E. Alors la formule de Grassmann nous dit que

$$\dim(\ker(\varphi)) + \dim(H) = \dim(E) \ .$$

Mais puisque φ induit un isomorphisme de H sur $\mathrm{Im}(\varphi)$, on a $\dim(H) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \mathrm{rang}(\varphi)$, et on obtient bien

$$\mathrm{rang}(\varphi) + \dim(\ker(\varphi)) = \dim(E) \ .$$

□

3.3 Définition d'une application linéaire à partir de ses valeurs sur une base

Proposition 3.15. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $(x_1, \dots, x_n)$ une base de E. Alors pour toute famille $(y_1, \dots, y_n)$ de vecteurs de F il existe une unique application linéaire $\varphi \colon E \to F$ telle que $\varphi(x_1) = y_1, \dots, \varphi(x_n) = y_n$.*

Démonstration. Commençons par montrer qu'une telle application, si elle existe est unique : si φ, ψ sont deux applications linéaires telles que $\varphi(x_i) = \psi(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $(\varphi - \psi)(x_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$; par conséquent $\ker(\varphi - \psi)$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient tous les x_i : c'est E tout entier puisque la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice. Donc $(\varphi - \psi)(x) = 0$ pour tout $x \in E$, autrement dit $\varphi = \psi$.

Cet argument nous dit que, pour définir φ, on n'a pas beaucoup de choix : tout vecteur x s'écrit de manière unique sous la forme $x = \lambda_1 x_1 + \dots \lambda_n x_n$, et on pose

$$\varphi(x) = \lambda_1 \varphi(x_1) + \dots + \lambda_n \varphi(x_n) \ .$$

Reste à vérifier que φ ainsi définie est linéaire ; pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \ .$$

Donc

$$\lambda x + y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i + \mu_i) x_i \ .$$

Par définition de φ, on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda x + y) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i + \mu_i) x_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i + \mu_i) \varphi(x_i) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varphi(x_i) \\
&= \lambda \varphi(x) + \varphi(y) \ .
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.16. Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et $(x_1, \dots, x_n)$ une base de E. Par la proposition précédente, il existe une unique application linéaire de $\mathbb{K}^n$ sur E telle que $\varphi(e_i) = x_i$; par construction, cette application envoie une base de $\mathbb{K}^n$ sur une base de E et est donc un isomorphisme. □

On voit donc que deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension sont isomorphes. Dans la suite, on fera la convention que $K^0 = \{0\}$.

Proposition 3.17. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et F un sous-espace vectoriel de dimension k. Alors il existe une application linéaire $\varphi \colon E \to \mathbb{K}^{n-k}$ tel que $F = \ker(\varphi)$*

(Notons qu'on convient que $K^0 = \{0\}$, ce qui est cohérent avec le fait que $\dim(\mathbb{K}^n) = n$)

Démonstration. Si $k = n$, autrement dit si $F = E$, l'application $E \to \{0\}$ qui envoie tout x sur 0 convient. Sinon, partons d'une base $(e_1, \dots, e_k)$ de F et complétons-la (grâce au théorème de la base incomplète) en une base $(e_k)_{i \leq n}$ de E. Soit $f_1, \dots, f_{n-k}$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n-k}$, et φ l'unique application linéaire telle que $\varphi(e_i) = 0$ pour tout $i \leq n$, et $\varphi(e_{k+i}) = f_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n-k\}$. Alors il est clair que $F \subseteq \ker(\varphi)$, et que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{K}^{n-k}$. Le théorème du rang nous donne $\dim(\ker(\varphi)) = k = \dim(F)$, donc $F = \ker(\varphi)$. □

3.4 Applications linéaires et matrices

Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E, alors d'après la proposition 3.15 toute l'information sur φ est contenue dans la valeur des vecteurs $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)$; on peut regrouper cette information dans une matrice.

Définition 3.18. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi \colon E \to F$ une application linéaire. Etant données une base $B = (e_1, \ldots, e_m)$ de E et une base $B' = (f_1, \ldots, f_n)$ de F, on peut écrire pour tout j

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i \ .$$

La *matrice de φ dans les bases B, B'* est la matrice

$$M(\varphi)_{B \to B'} = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \ .$$

Autrement dit : la matrice de φ dans les bases B, B' est la matrice dont la j-ième colonne correspond aux coordonnées du vecteur $\varphi(e_j)$ dans la base $(f_1, \ldots, f_n)$. Le nombre de colonnes de cette matrice correspond à la dimension de l'espace de départ, et le nombre de lignes correspond à la dimension de l'espace d'arrivée.

Quand $E = F$ et $B = B'$, on parle simplement de la matrice de φ dans la base B.

Donnons quelques exemples.

Exemple.

1. Considérons la rotation d'angle $\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$, dont on note la base canonique (e_1, e_2) : elle envoie e_1 sur e_2 et e_2 sur $-e_1$, et sa matrice dans la base canonique est donc $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Soit l'application $\varphi \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x, y, z, t) = (x+y+t, z-y)$. En notant (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et (f_1, f_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ on a : $\varphi(e_1) = (1, 0) = f_1$; $\varphi(e_2) = (1, -1) = f_1 - f_2$; $\varphi(e_3) = (0, 1) = f_2$, et $\varphi(e_4) = (1, 0) = e_1$. La matrice de φ dans les bases canoniques est donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Considérons l'espace $\mathbb{R}_4[X]$ muni de la base $(1, X, , X^2, X^3, X^4)$ et l'application linéaire $P \mapsto P - XP'$. Alors on a $\varphi(1) = 1$, $\varphi(X) = 0$, $\varphi(X^2) = -X^2$, $\varphi(X^3) = -2X^3$ et $\varphi(X^4) = -3X^4$. La matrice de φ dans cette base est donc
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

La même application linéaire va avoir des matrices différentes si on change les bases ! Par exemple, si $\varphi \colon E \to E$ est un isomorphisme d'un espace de dimension finie E sur lui-même, que $(e_1, \ldots, e_n) = B$ est une base de E, alors $B' = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ est aussi une base de E ; et la matrice $M(\varphi)_{B \to B'}$ est la matrice identité I_n (où $n = \dim(E)$).

Le calcul fait dans la preuve de la Proposition 3.15 nous permet d'expliciter comment utiliser des matrices pour calculer les valeurs d'applications linéaires.

Proposition 3.19. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi \colon E \to F$ une application linéaire, $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $B' = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Pour tout $x \in E$, on définit $X = \big(x_1, \ldots, x_m\big)$, où $x_1, \ldots, x_m$ sont les coordonnées de x dans la base B. Alors, si $x \in X$ et $\varphi(x) = a_1 f_1 + \ldots a_n f_n$, on a $AX = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Autrement dit : calculer $\varphi(x)$ revient à calculer AX.*

En particulier, déterminer le noyau de φ revient à résoudre l'équation $AX = 0$ dans $M_{m,1}(\mathbb{K})$; comme on l'a vu au chapitre précédent, une façon de résoudre ce système est d'échelonner A en lignes (en termes d'application linéaires : remplacer φ par $\psi \circ \varphi$, où ψ est un automorphisme de F, ne change pas le noyau de φ). De manière abusive, on appelle *noyau de $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$* le noyau de l'application linéaire φ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$ est égale à φ.

Rappelons aussi que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, le système $AX = 0$ n'a que 0 comme solution ; d'après le résultat ci-dessus cela arrive si et seulement si l'application linéaire φ dont A est la matrice dans la base canonique a un noyau réduit à $\{0\}$, autrement dit si et seulement si φ est un automorphisme de $\mathbb{K}^n$.

Dans le même ordre d'idées, déterminer l'image de φ revient à trouver tous les $Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que le système $AX = Y$ a une solution, ou encore l'espace vectoriel engendré par les colonnes de A ; cette fois on a vu qu'on pouvait faire cela en échelonnant A en colonnes (remplacer φ par $\varphi \circ \psi$, où ψ est un automorphisme de E, ne change pas son image).

Démonstration. Rappelons que le coefficient $a_{i,j}$ de A est défini par l'égalité

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i \ .$$

Si les coordonnées de x dans la base B sont $x_1, \ldots, x_n$, c'est-à-dire si on a $x = \sum_{k=1}^{m} x_k e_k$ alors :

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \varphi\left(\sum_{k=1}^{m} x_k e_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} x_k \varphi(e_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} x_k \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} f_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{i,k} x_k\right) f_i
\end{aligned}$$

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, la i-ième coordonnée de $\varphi(x)$ est donc égale à $\sum_{k=1}^{m} a_{i,k} x_k$, qui est bien le coefficient sur la i-ème ligne de AX. $\square$

Rappelons que, étant données deux matrices $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{m,p}(\mathbb{K})$, si on appelle $B_1, \ldots, B_p$ les colonnes de B, alors AB est la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont $AB_1, \ldots, AB_p$. Au cas où ce ne serait pas clair, refaisons le calcul : pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, B_j est la matrice à m lignes et 1 colonne $\begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{m,j} \end{pmatrix}$; donc AB_j est la matrice à n lignes et 1 colonne dont le coefficient sur la ligne i est égal à $\sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}$. On voit donc que, comme annoncé, AB_j est la j-ième colonne de AB.

Proposition 3.20. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E_1, E_2, E_3 trois espaces vectoriels de dimension finie et B_1, B_2, B_3 des bases de E_1, E_2, E_3 respectivement. Alors, pour toutes applications linéaires $\varphi \colon E_2 \to E_3$ et $\psi \colon E_1 \to E_2$ on a*

$$M(\varphi \circ \psi)_{B_1 \to B_3} = M(\varphi)_{B_2 \to B_3} M(\psi)_{B_1 \to B_2} \ .$$

On retrouve ici le lien entre composition d'applications et produit de matrices qui nous a servi à introduire le produit de matrices...

Démonstration. Notons $B = (x_1, \ldots, x_{n_1})$. Soit n_i la dimension de E_i. Alors $M(\varphi \circ \psi)_{B_1 \to B_3}$ est la matrice à n_3 lignes et n_1 colonnes dont la j-ième colonne est formée des coordonnées de $\varphi \circ \psi(x_j)$ dans la base B_3.

Quant à $M(\varphi)_{B_2 \to B_3} M(\psi)_{B_1 \to B_2}$, c'est la matrice à n_3 lignes et n_1 colonnes dont la j-ième colonne est égale au produit $M(\varphi)_{B_2 \to B_3} G_j$, où G_j est la j-ième colonne de $M(\psi)_{\circ B_1 \to B_2}$, c'est-à-dire la matrice colonne formée des coordonnées de $\psi(x_j)$ dans la base B_2. La j-ième colonne de $M(\varphi)_{\circ B_2 \to B_3} M(\psi)_{\circ B_1 \to B_2}$ est donc formée des coordonnées de $\varphi(\psi(x_j))$ dans la base B_3, ce qui nous démontre bien l'égalité attendue. $\square$

Définition 3.21. Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et $B = (e_1, \dots, e_n), B' = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E. La *matrice de passage* $P_{B,B'}$ de B à B' est la matrice $M(id)_{B' \to B}$; autrement dit, c'est la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne donne les coordonnées de f_j dans la base B.

Attention aux conventions ! La matrice de passage de B à B' est bien définie comme la matrice de l'identité *de* B' *vers* B ! Pour cette raison je recommanderais d'utiliser la notation lourde mais explicite $M(id)_{B' \to B}$ plutôt que la notation $P_{B,B'}$. Ci-dessous on va tout de même énoncer quelques propriétés des matrices de passage en utilisant la notation $P_{B,B'}$, qui est la plus communément utilisée.

Proposition 3.22. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et B, B' deux bases de E. Alors la matrice de passage $P_{B,B'}$ est inversible, et son inverse est la matrice de passage $P_{B',B}$ de B' à B.*

Démonstration. Si on raisonne en termes d'applications linéaires, ce résultat est immédiat :

$$P_{B,B'} P_{B',B} = M(id)_{B' \to B} M(id)_{B \to B'} = M(id)_{B \to B} = I_n \ .$$

□

Notons, que, réciproquement, toute matrice inversible peut être vue comme une matrice de passage : si $A \in \mathbb{K}^n$ est inversible, ses vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$ (si on pense que A est la matrice représentant une application linéaire φ dans la base canonique $B = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$, ses vecteurs colonnes sont les vecteurs $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$, qui forment une base B' puisque φ est un automorphisme) et A est la matrice dont les colonnes expriment les coordonnées des vecteurs de B' dans la base B, autrement dit la matrice de passage de B à B'.

Proposition 3.23. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et B, B' deux bases de E. Si $x \in E$, et X, X' désignent les vecteurs colonnes donnant les coordonnées de x dans les bases B, B' respectivement, alors on a $X = P_{B,B'} X'$.*

Démonstration. Par définition, $P_{B,B'} X' = M(id)_{B' \to B} X'$ est la matrice colonne listant les coordonnées de $id(x) = x$ dans la base B : c'est X. □

Proposition 3.24. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ≥ 1, et $\varphi \colon E \to F$ une application linéaire. Soit B_E, B'_E deux bases de E ; B_F, B'_F deux bases de F, et P, Q les matrices de passage de B_E à B'_E et B_F à B'_F respectivement. Si M est la matrice de φ de B_E dans B_F, et M' est la matrice de φ de B'_E dans B'_F, alors on a*

$$M' = Q^{-1} M P \ .$$

En particulier, quand $E = F$, que M désigne la matrice de φ dans la base B, M' la matrice de φ dans la base B' et P la matrice de passage de B à B' alors on a

$$M' = P^{-1} M P \ .$$

Démonstration. On écrit

$$\begin{aligned} M' &= M(\varphi)_{B'_E \to B'_F} \\ &= M(id)_{B'_F \to B'_F} M(\varphi)_{B_E \to B_F} M(id)_{B'_E \to B_E} \\ &= Q^{-1} M P \end{aligned}$$

□

Par exemple, considérons l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(x, y, z) = (9x - y - 6z, 5x + 3y - 6z, x - y - 2z) \ .$$

Cette application est linéaire, et sa matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$\begin{pmatrix} 9 & -1 & -6 \\ 5 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ .$$