

Chapitre 3: Espaces vectoriels I.

On désigne par \mathbf{K} un corps, d'addition $+_K$, de multiplication \cdot_K , d'unité 1_K .

1. Espaces et sous-espaces

Définition: Un *espace vectoriel* sur \mathbf{K} est un ensemble non vide E muni d'une loi d'addition

$$+ : E^2 \rightarrow E : (u, v) \mapsto u + v$$

et d'une loi externe

$$\mathbf{K} \times E \rightarrow E : (\lambda, u) \mapsto \lambda u$$

qui satisfont aux propriétés suivantes:

(1) l'addition $+$ est

associative: quels que soient $u, v, w \in E$, $(u + v) + w = u + (v + w)$.

commutative: quels que soient $u, v \in E$, $u + v = v + u$.

à neutre: il existe un élément noté $\vec{0}$ de E , tel que pour tout $u \in E$, $\vec{0} + u = u$.

à réciproques ou opposés: quel que soit $u \in E$, il existe un élément noté $-u \in E$ tel que $-u + u = \vec{0}$.

(2) les lois sur \mathbf{K} et E sont compatibles:

quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ et $u, v \in E$,

$$\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$$

$$(\lambda +_K \mu)u = \lambda u + \mu u$$

$$(\lambda \cdot_K \mu)u = \lambda(\mu u)$$

$$1_K u = u.$$

Les éléments de E sont (souvent) appelés des *vecteurs* et les éléments de \mathbf{K} sont appelés des *scalaires*. Dans la suite, on écrira ' E est un \mathbf{K} -espace', pour signifier ' E est un espace vectoriel sur le corps \mathbf{K} '.

Cette notion est *fondamentale* et les exemples abondent.

1. L'exemple par excellence

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $E = \mathbf{K}^n$ muni de l'addition

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

et de la multiplication par le scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

est un \mathbf{K} -espace. Le neutre pour $+$ est $\vec{0} = (0, \dots, 0)$ et l'opposé du n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ est $(-x_1, \dots, -x_n)$.

Cas particuliers:

Pour $n = 1$, \mathbf{K} est un \mathbf{K} -espace. (C'est une autre manière de voir les propriétés de corps.)

Pour $n = 2$ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, c'est le plan du lycée et l'addition est la *règle du parallélogramme*.

2. Corps emboîtés

Soient \mathbf{K} et \mathbf{L} deux corps tels que $\mathbf{K} \subset \mathbf{L}$ (penser à $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$), alors \mathbf{L} est un \mathbf{K} -espace, pour la loi d'addition $+_L$ et la multiplication $\mathbf{K} \times \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L} : (\lambda, u) \mapsto \lambda \cdot_L u$

3. Les polynômes en une indéterminée

L'ensemble $\mathbf{K}[X]$ des polynômes est un \mathbf{K} -espace pour l'addition (cf chapitre 1)

$$\sum_{i \in \mathbf{N}} a_i X^i + \sum_{i \in \mathbf{N}} b_i X^i = \sum_{i \in \mathbf{N}} (a_i + b_i) X^i$$

et la multiplication par le scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$

$$\lambda \left(\sum_{i \in \mathbf{N}} a_i X^i \right) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \lambda a_i X^i.$$

Le neutre est le polynôme nul et l'opposé de P est le polynôme $-P$.

4. Les suites de réels

Soit $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de nombres réels. $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est un \mathbf{R} -espace pour les lois

$$(x_n)_{n \in \mathbf{N}} + (y_n)_{n \in \mathbf{N}} = (x_n + y_n)_{n \in \mathbf{N}}, \quad \lambda(x_n)_{n \in \mathbf{N}} = (\lambda x_n)_{n \in \mathbf{N}}.$$

Le neutre pour $+$ est la suite constante nulle et l'opposé de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est la suite $(-x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

5. Les fractions rationnelles

De manière analogue à $\mathbf{K}[X]$, l'ensemble $\mathbf{K}(X)$ est un \mathbf{K} -espace.

Un exemple de calcul: dans tout \mathbf{K} -espace E , on a $\lambda u = 0$ ssi $\lambda = 0$ ou $u = \vec{0}$.

Dans un sens: si $\lambda = 0$, $\lambda u = 0u = (0+0)u = 0u + 0u$ donc $0u = \vec{0}$; si $u = \vec{0}$, $\lambda u = \lambda \vec{0} = \lambda(\vec{0} + \vec{0}) = \lambda \vec{0} + \lambda \vec{0}$ donc $\lambda \vec{0} = \vec{0}$.

Réciproquement: supposons $\lambda u = \vec{0}$. Si $\lambda = 0$ c'est fini; sinon λ est inversible dans \mathbf{K} et on a $\vec{0} = \lambda^{-1} \vec{0} = \lambda^{-1}(\lambda u) = 1_K u = u$.

Soit E est un \mathbf{K} -espace.

Définition (sous-espace)

Une partie non vide $F \subset E$ est appelée un *sous-espace vectoriel* de E si

$\forall u, v \in F, \forall \lambda \in K, u + v \in F$ et $\lambda u \in F$.

Remarque: Par le calcul qui précède, pour $u \in F$, $0u = \vec{0} \in F$, i.e. *tout sous-espace $F \subset E$ contient $\vec{0}$.*

Tout sous-espace vectoriel $F \subset E$ est un \mathbf{K} -espace pour les lois héritées de E .

Pour la suite on écrira (souvent) *sous-espace* pour signifier *sous-espace vectoriel*.

Exemples

1. Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$. On rappelle que la partie $D \subset \mathbf{R}^2$ des points (x, y) satisfaisant à l'équation $ax + by = c$ est appelée une *droite affine du plan*. Une telle droite D est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^2 ssi $c = 0$.

2. Soient $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. La partie $\Pi \subset \mathbf{R}^3$ des points (x, y, z) satisfaisant à l'équation $ax + by + cz = d$ est appelée un *plan affine de l'espace*. Un tel plan Π est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^3 ssi $d = 0$.

3. Les deux exemples précédents sont des cas particuliers de la situation générale suivante:

Définition: Soient $\mathbf{u} = (u_i)_{i \in I}$ et $\mathbf{v} = (v_j)_{j \in J}$ deux familles finies de A . On dit que \mathbf{u} est une sur-famille de \mathbf{v} ou que \mathbf{v} est une sous-famille de \mathbf{u} s'il existe une injection

$$\phi : J \rightarrow I$$

telle que $v_j = u_{\phi(j)}$ pour tout $j \in J$.

On notera cela (par abus) $\mathbf{v} \subset \mathbf{u}$.

Exemple: (u_2, u_1) est une sous-famille de (u_1, u_2, u_3) , ici $J = \{1, 2\}$, $I = \{1, 2, 3\}$ et $\phi(1) = 2, \phi(2) = 1$.

3. Combinaisons linéaires, familles génératrices, familles libres

Soit E un espace vectoriel sur \mathbf{K} et $\mathbf{v} = (v_i)_{i \in I}$ une famille finie de E .

Définition: on appelle *combinaison linéaire* de \mathbf{v} toute somme

$$\sum_{i \in I} \lambda_i v_i$$

avec $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments de \mathbf{K} .

Attention: Une combinaison linéaire est une somme *finie*.

Si $I = \{1, 2, \dots, p\}$ une telle combinaison linéaire s'écrit

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p.$$

Exemples:

1. $E = R^3$ $\mathbf{v} = (v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0))$. Une combinaison linéaire est une expression de la forme

$$\lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0) = (\lambda, \mu, 0), \quad \lambda, \mu \in R.$$

2. $E = \mathbf{C}[X]$, $\mathbf{v} = (v_1 = 1, v_2 = X)$. Une combinaison linéaire est un polynôme de degré au plus 1: $z_0 + z_1 X \in \mathbf{C}[X]$.

3. $E = K_{\leq n}[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n . Tout polynôme $P \in E$ est combinaison linéaire de la famille $(X^j)_{0 \leq j \leq n}$.

Proposition (Sous-espace engendré). Soit $\mathbf{v} = (v_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments de E .

(1) L'ensemble $Vect((v_i)_{i \in I}) := \{\sum_{i \in I} \lambda_i v_i, (\lambda_i)_{i \in I} \text{ famille finie de } \mathbf{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

(2) Si $F \subset E$ est un sous-espace de E tel que pour tout $i \in I, v_i \in F$, alors $Vect((v_i)_{i \in I}) \subset F$.

En d'autres termes: pour l'inclusion ensembliste, $Vect((v_i)_{i \in I})$ est le plus petit sous-espace de E contenant $v_i, i \in I$. On dit que $Vect((v_i)_{i \in I})$ est le sous-espace de E engendré par \mathbf{v} .

preuve: cf cours.

Exemples:

1. $Vect((1, 0, 0), (0, 1, 0)) \subset R^3$ est le plan de coordonnées $\Pi_z = \{(x, y, z) \in R^3, z = 0\}$.

2. $Vect(1, X)$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus 1.

3. $Vect(1, X, X^2, \dots, X^n) = K_{\leq n}[X]$ est le sous-espace de $\mathbf{K}[X]$ des polynômes de degré au plus n .

4. $Vect((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) = R^3$ car tout $(a, b, c) \in R^3$ s'écrit $(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$.

Définition

(i) Famille génératrice:

On dit que la famille finie $(v_i)_{i \in I}$ est une famille *génératrice* de E si

$$\text{Vec}(v_i)_{i \in I} = E$$

i.e. si tout élément de E est combinaison linéaire des éléments de $(v_i)_{i \in I}$.

(ii) Espace de dimension finie:

On dit que E est un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbf{K} s'il admet une famille génératrice finie.

Proposition: $(v_i)_{i \in I}$ est génératrice de E ssi l'application

$$\mathbf{K}^p \rightarrow E : (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \mapsto \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i v_i$$

est surjective.

Exemples:

1. $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une famille génératrice de R^3

2. Plus généralement: $((1_K, 0_K, \dots, 0_K), \dots, (0_K, \dots, 0_K, 1_K))$ est une famille génératrice de K^n de cardinal n pour tout corps K .

Cette famille sera appelée plus loin *la base canonique* de K^n .

3. Dans \mathbf{K}^n , la famille $(v_1 = (a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, v_p = (a_{1p}, \dots, a_{np}))$ de cardinal p est génératrice ssi pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n$ l'équation

$$\sum_{1 \leq j \leq p} \lambda_j (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}) = (a_1, \dots, a_n)$$

admet au moins une solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{K}^p$, i.e. ssi le système

$$\begin{aligned} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1p}\lambda_p &= a_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{np}\lambda_p &= a_n \end{aligned}$$

admet au moins une solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.

Proposition: Toute sur-famille \mathbf{u} d'une famille génératrice \mathbf{v} est encore génératrice.

Preuve: soit $\phi : J \rightarrow I$ telle que $v_j = u_{\phi(j)}$. par hypothèse, tout $v \in E$ est combinaison linéaire des éléments de \mathbf{v} :

$$v = \sum_{j \in J} \lambda_j v_j = \sum_{j \in J} \lambda_j u_{\phi(j)}.$$

C'est donc aussi une combinaison linéaire des $u_i, i \in I$.

Définition (Famille libre)

On dit qu'une famille finie $(v_i)_{i \in I}$ est libre si elle satisfait à la condition suivante:

Pour toute famille finie $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de K , l'égalité

$$\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = \vec{0}$$

implique $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$.

Proposition Soit $I = \{1, \dots, p\}$. La famille (v_1, \dots, v_p) est libre ssi l'application

$$K^p \rightarrow E : (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \mapsto \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

est injective.

Preuve: supposons cette application injective. On sait que $(0, \dots, 0) \mapsto \vec{0} \in E$. Par injectivité, aucun p -uplet non nul $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ ne peut être envoyé sur $\vec{0}$, i.e. si $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$ alors $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in I$. La famille $(v_i)_{i \in I}$ est donc libre.

Réciproquement: supposons \mathbf{v} libre. La condition $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = \sum_{i \in I} \mu_i v_i$ équivaut à

$$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_p - \mu_p)v_p = \vec{0}$$

et par liberté on doit avoir $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i \in I$.

Dans \mathbf{K}^n , la famille

$$(v_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}), \dots, v_p = (a_{1p}, \dots, a_{np}))$$

est libre ssi le système

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1p}\lambda_p = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{np}\lambda_p = 0$$

admet pour unique solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = (0, \dots, 0)$.

Par la proposition, cette famille est libre ssi pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{K}^n$, le système

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1p}\lambda_p = a_1$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{np}\lambda_p = a_n$$

admet au plus une solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$.

Exemples:

1. Toute famille de cardinal 1 non nulle ($v \neq 0$) d'un \mathbf{K} -espace E est libre.
2. $((1_K, 0), (0, 1_K))$ est libre dans K^2 .
3. La famille $((1_K, 0, \dots, 0), (0, 1_K, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1_K))$ de cardinal n est libre dans K^n .
4. $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ est libre dans R^3 .

Proposition: Toute sous-famille \mathbf{v} d'une famille libre \mathbf{u} est libre.

preuve: Soit $\phi : J \rightarrow I$ telle que $v_j = u_{\phi(j)}$. Supposons $\vec{0} = \sum_{j \in J} \lambda_j v_j = \sum_{j \in J} \lambda_j u_{\phi(j)}$. C'est une combinaison linéaire d'éléments de \mathbf{u} nulle, donc tous les coefficients λ_j sont nuls.

Définition/terminologie On dit qu'une famille est liée si elle n'est pas libre, i.e. s'il existe une famille finie $(\lambda_i)_{i \in I}$ non nulle telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = \vec{0}$.

Proposition: $(v_i)_{i \in I}$ est liée ssi l'un des v_i est combinaison linéaire des autres.

preuve: cf cours

Exemples

1. Si \mathbf{v} contient $\vec{0}$ elle est liée: $1\vec{0} = \vec{0}$.
2. Si deux éléments de \mathbf{v} sont égaux, elle est liée: $v - v = \vec{0}$.
2. Dans \mathbb{R}^2 , $((1, 0), (1, 1), (0, 1))$ est liée: $(1, 0) - (1, 1) + (0, 1) = (0, 0)$.

4. Bases

Définition: On dit qu'une famille finie $(v_i)_{i \in I}$ est une base de E si elle est génératrice et libre.

Proposition: $(v_i)_{i \in I}$ est une base ssi tout $v \in E$ s'écrit d'une et une seule manière comme combinaison linéaire des v_i .

Preuve: Une telle combinaison linéaire existe car $(v_i)_{i \in I}$ est génératrice. Cette combinaison linéaire est unique car $(v_i)_{i \in I}$ est libre.

La famille (v_1, \dots, v_p) est donc une base ssi l'application

$$K^p \rightarrow E : (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \mapsto \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

est bijective.

Terminologie: si $(v_i)_{i \in I}$ est une base de E et $v \in E$ s'écrit $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$, $\lambda_i \in K, i \in I$, alors le scalaire λ_i est appelé la i -ème composante de v dans la base $(v_i)_{i \in I}$.

Exemples:

1. La liste des coordonnées de (a, b, c) dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est (a, b, c)
2. La liste des coordonnées de (a, b, c) dans la base $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ est donnée par la solution $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ du système

$$(a, b, c) = \lambda(1, 1, 1) + \lambda'(0, 1, 1) + \lambda''(0, 0, 1)$$

i.e. par

$$a = \lambda, \quad b = \lambda + \lambda', \quad c = \lambda + \lambda' + \lambda''$$

i.e. par

$$\lambda = a \quad \lambda' = b - a \quad \lambda'' = c - b.$$

Le théorème qui suit est *important*. L'argument de preuve est *instructif*.

Théorème de la base incomplète (TBI)

Soit $E \neq \{\vec{0}\}$ un espace vectoriel de dimension finie sur le corps \mathbf{K} , \mathbf{l} une famille finie libre et \mathbf{g} une famille finie génératrice de E telles que $\mathbf{l} \subset \mathbf{g}$.

Alors, il existe une base \mathbf{b} de E telle que

$$\mathbf{l} \subset \mathbf{b} \subset \mathbf{g}.$$

preuve: pour rappel, on désigne par $|\mathbf{v}|$ le cardinal d'une famille finie \mathbf{v} .
On considère l'ensemble

$$L := \{\mathbf{e}, \mathbf{e} \text{ est libre et } \mathbf{l} \subset \mathbf{e} \subset \mathbf{g}\}.$$

L est non vide car $\mathbf{l} \in L$. Soit C_L la partie de N suivante: $C_L := \{|\mathbf{e}|, \mathbf{e} \in L\} \subset N$. C_L est non vide car L est non vide et C_L est majorée par $|\mathbf{g}| = m$. Elle admet donc un maximum $n \leq m$. Soit alors $\mathbf{b} \in L$ de cardinal n .

On va montrer que \mathbf{b} est une base.

Pour cela on commence par observer que tout élément de \mathbf{g} est combinaison linéaire de \mathbf{b} :

Soit g_i un élément de \mathbf{g} . Deux possibilités: (1) g_i est élément de \mathbf{b} et (2) g_i ne l'est pas. Dans le premier cas $g_i = 1g_i$ est une combinaison linéaire de \mathbf{b} . Dans le second cas, la famille (b_1, \dots, b_n, g_i) est liée car \mathbf{b} est de cardinal maximal parmi les familles libres; il existe donc des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu \in K$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu g_i = \vec{0}.$$

Observer que $\mu = 0$ contredit la liberté de \mathbf{b} . Donc $\mu \neq 0$ et on a

$$g_i = \frac{-1}{\mu} \left(\sum_j \lambda_j b_j \right).$$

Tout élément de \mathbf{g} est donc combinaison linéaire de \mathbf{b} , ce que l'on peut réécrire comme suit: quel que soit $i \in \{1, \dots, m\}$, il existe des scalaires $\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,n} \in \mathbf{K}$ tels que

$$g_i = \sum_{1 \leq j \leq n} \lambda_{i,j} b_j.$$

Soit alors $v \in E$. Comme \mathbf{g} est génératrice, il existe $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbf{K}$ tels que

$$v = \mu_1 g_1 + \dots + \mu_m g_m = \mu_1 \left(\sum_j \lambda_{1,j} b_j \right) + \dots + \mu_m \left(\sum_j \lambda_{m,j} b_j \right).$$

C'est donc une combinaison linéaire de \mathbf{b} . \mathbf{b} est donc génératrice. Comme \mathbf{b} est aussi libre, c'est une base de E .

Corollaire: soit $E \neq \{\vec{0}\}$ de dimension finie sur \mathbf{K} .

(i) De toute famille génératrice finie de E on peut extraire une base.

(ii) Toute famille libre peut être complétée en une base de E .

En particulier, *tout espace vectoriel $E \neq \{\vec{0}\}$ de dimension finie admet une base.*

preuve: (i) appliquer le TBI à la famille génératrice $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_i)_{i \in \mathbf{I}}$ avec $\mathbf{l} = (g_{i_0})$, pour g_{i_0} un élément non nul de \mathbf{g} . (Un tel élément existe car $E \neq \{\vec{0}\}$.)

(ii) soit $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_r)$ libre et $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_m)$ génératrice de E . Etant une sur-famille de \mathbf{g} , la famille $\mathbf{g}' = (l_1, \dots, l_r, g_1, \dots, g_m)$ est génératrice. Appliquer le TBI à $\mathbf{l} \subset \mathbf{g}'$.

Le (i) assure l'existence d'une base car par hypothèse E admet une famille génératrice finie.

Définition: on convient que l'espace trivial $E = \{\vec{0}\}$ admet pour base la famille vide.

5. Dimension

Proposition (Steinitz):

Soit $E \neq \{\vec{0}\}$ un espace vectoriel sur \mathbf{K} . On suppose $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ libre et $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$ génératrice. Alors $n \leq m$.

La notion de *dimension* qui suit est fondamentale:

Théorème: Soit $E \neq \{\vec{0}\}$ un espace vectoriel qui admet une famille génératrice finie (i.e. de dimension finie). Alors toutes les bases de E ont même cardinal.

Preuve: soit \mathbf{e} et \mathbf{f} deux bases de cardinal m et n . Alors $m \leq n$ et $n \leq m$, par Steinitz.

Définition (Dimension). Soit E un \mathbf{K} -espace admettant une famille génératrice finie. On appelle dimension de E le cardinal de l'une quelconque de ses bases. On note cette dimension $\dim_{\mathbf{K}}(E)$.

Remarque: l'espace trivial $E = \{\vec{0}\}$ admettant une base à 0 élément est de dimension 0.

Proposition: soit E un \mathbf{K} -espace de dimension n et $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs. Alors \mathbf{e} est libre ssi \mathbf{e} est génératrice ssi \mathbf{e} est une base.

Preuve: il suffit de montrer que libre implique génératrice et que génératrice implique libre.

Par le corollaire du TBI, on peut compléter la famille libre \mathbf{e} en une base \mathbf{b} de E mais cette base est de cardinal n donc égale à \mathbf{e} .

Par le corollaire du TBI, si \mathbf{e} est génératrice, on peut en extraire une base \mathbf{b} de même cardinal donc égale à \mathbf{e} .

Proposition: On suppose E de dimension finie n sur \mathbf{K} .

Tout sous-espace $F \subset E$ est un \mathbf{K} -espace de dimension finie et on a $\dim F \leq \dim E$.

preuve: si $F = \{\vec{0}\}$ alors F est de dimension finie $= 0$.

Supposons $F \neq \{\vec{0}\}$. Si $v \in F$ est non nul, (v) est libre dans F . L'ensemble L des familles finies libres de F est donc non vide.

Toute famille finie libre de F est aussi une famille finie libre de E . Par Steinitz, le cardinal d'une telle famille est au plus n .

L'ensemble des cardinaux $C_L := \{|\mathbf{e}|, \mathbf{e} \text{ finie libre de } F\} \subset \mathbb{N}$ étant majoré par n admet un maximum $m \leq n$.

Soit alors $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m) \in L$ de cardinal m et $f \in F \setminus \{f_1, \dots, f_m\}$. La famille (f_1, \dots, f_m, f) est liée par maximalité de m , i.e. il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu \in K$ non tous nuls, tels que

$$\sum_i \lambda_i f_i + \mu f = \vec{0}.$$

Comme dans le théorème de la base incomplète, $\mu \neq 0$ (sinon l'on contredirait la liberté de \mathbf{f}) et donc f est combinaison linéaire de \mathbf{f} . Comme c'est vrai pour tout $f \in F$, \mathbf{f} est génératrice, donc une base de F de cardinal m avec $m \leq n$.

Corollaire: supposons $F \subset G$ deux sous-espaces emboîtés de E de dimension finie n . Si $\dim(F) = \dim(G)$ alors $F = G$.

preuve: par la proposition qui précède on sait que F et G sont de dimension finie $\leq n$. (En appliquant la même proposition à $F \subset G$ on a de plus $\dim(F) \leq \dim(G)$.)

Supposons $\dim F = \dim G$. Toute base de F contient $\dim(F) = \dim(G)$ vecteurs. C'est donc une famille libre de G de cardinal $\dim(G)$, i.e. une base de G . Tout vecteur de G est donc combinaison linéaire d'éléments de F , i.e. $G \subset F$.

6. Rang d'une famille finie de vecteurs, algorithme de Gauss

Définition: on appelle rang (\mathbf{v}) la dimension du sous-espace $Vect(\mathbf{v})$.

Proposition: Soit $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille finie de E . Alors $Vect(\mathbf{v})$ ne change pas

- (i) si l'on permute deux vecteurs de \mathbf{v}
- (ii) si l'on remplace un vecteur de \mathbf{v} par un multiple non nul de lui-même
- (iii) si l'on remplace un vecteur de \mathbf{v} par une combinaison linéaire des autres vecteurs de \mathbf{v} .

Ces transformations sont appelées *transformations élémentaires*.

preuve: (i) est clair. Faisons (ii) et (iii) d'un coup: fixons $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ et créons une nouvelle famille $\mathbf{v}' = (v_1, \dots, v_{i_0-1}, v'_{i_0}, v_{i_0+1}, \dots, v_p)$ en remplaçant v_{i_0} par la combinaison linéaire

$$v'_{i_0} = \lambda_{i_0} v_{i_0} + \sum_{1 \leq i \leq p, i \neq i_0} \lambda_i v_i, \quad \lambda_{i_0} \neq 0.$$

Vérifions $Vect(\mathbf{v}) = Vect(\mathbf{v}')$: tout $v \in Vect(\mathbf{v})$ s'écrit

$$\begin{aligned} v &= \sum_{1 \leq i \leq p} \mu_i v_i, \quad \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbf{K} \\ &= \sum_{i \neq i_0} \mu_i v_i + \mu_{i_0} v_{i_0} \\ &= \sum_{i \neq i_0} \mu_i v_i + \mu_{i_0} \frac{1}{\lambda_{i_0}} (v'_{i_0} - \sum_{i \neq i_0} \lambda_i v_i) \\ &= \sum_{i \neq i_0} (\mu_i - \mu_{i_0} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}}) v_i + \frac{\mu_{i_0}}{\lambda_{i_0}} v'_{i_0} \in Vect(\mathbf{v}'). \end{aligned}$$

Ceci montre $Vect(\mathbf{v}) \subset Vect(\mathbf{v}')$. L'inclusion $Vect(\mathbf{v}') \subset Vect(\mathbf{v})$ est similaire.

Cette observation est à la base d'un algorithme connu sous le nom d' *algorithme du pivot de Gauss*, permettant de déterminer le rang de \mathbf{v} et d'en exhiber une base (plus généralement, de répondre aux questions usuelles d'algèbre linéaire). Afin de le mettre en place, voici un peu de vocabulaire matriciel.

Définition: On appelle *matrice* $n \times p$ à coefficients dans \mathbf{K} tout tableau

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & \dots & a_{n-1p} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

constitué de n lignes et p colonnes d'éléments $a_{ij} \in \mathbf{K}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p$.

On écrit (souvent) $M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$. L'indice i repère la *ligne* (ou *rangée*) de M , l'indice j repère la *colonne* de M . Le scalaire a_{ij} est appelé la *composante* ij de M .

On désigne la j -ième colonne de la matrice M par C_j :

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

et la i -ième ligne de M par L_i :

$$L_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{ip}).$$

Nomenclature: l'ensemble des matrices ayant n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbf{K} est noté $M_{n,p}(\mathbf{K})$.

Définition: M est dite *échelonnée* en colonnes si elle satisfait aux conditions de croissance du nombre de zéros suivantes:

(i) si pour C_j on a $a_{ij} = 0$ pour tout $i \leq i_0 - 1$ et $a_{i_0 j} \neq 0$, alors pour C_{j+1} on a $a_{i, j+1} = 0$ pour tout $i \leq i_0$.

(ii) si C_j est nulle, C_{j+1} est aussi nulle.

Exemple de matrice échelonnée:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit E un \mathbf{K} -espace de dimension n , $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$ une famille finie de E . Pour $1 \leq j \leq p$, on a

$$v_j = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ij} e_i$$

pour d'uniques coefficients $a_{ij} \in \mathbf{K}$.

Définition: la matrice M de \mathbf{v} dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la matrice $n \times p$ dont la j -ième colonne

$$C_j \text{ est constituée des composantes de } v_j \text{ dans la base } (e_i), \text{ i.e. } C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

Les transformations élémentaires sur les vecteurs de \mathbf{v} reviennent à effectuer des transformations élémentaires sur les colonnes de M .

Proposition: (Algorithme de Gauss) Toute matrice M peut être mise sous forme échelonnée en colonnes à l'aide de transformations élémentaires sur les colonnes.

preuve: on suppose M non nulle. Voici l'algorithme:

(0) soit i_0 le plus petit indice de ligne pour lequel la ligne L_{i_0} de M est non nulle et soit j_0 le plus petit indice de colonne pour lequel $a_{i_0 j_0} \neq 0$.

Le coefficient $a_{i_0 j_0}$ s'appelle le *pivot*.

Effectuer la permutation de colonnes C_1 et C_{j_0} .

(1) remplacer chaque colonne C_j pour $j \neq j_0$ par la colonne $C_j - \frac{a_{i_0 j}}{a_{i_0 j_0}} C_{j_0}$.

Ceci donne une matrice M' dont les lignes L'_1, \dots, L'_{i_0-1} sont nulles et la ligne L'_{i_0} s'écrit

$$L'_{i_0} = (a_{i_0 j_0} \quad 0 \quad \dots \quad 0).$$

(2) itérer les étapes 0 et 1 pour la matrice $M'' \in M_{p-i_0, n-1}(\mathbf{K})$ obtenue à partir de M' en supprimant la première colonne C'_1 et les lignes L'_1, \dots, L'_{i_0} .

Détermination du rang de $\text{Vect}((v_1, \dots, v_p))$

Soit M la matrice des composantes de la famille $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$ dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

- Effectuer des transformations élémentaires sur les colonnes pour mettre cette matrice sous forme échelonnée
- La famille de vecteurs dont les composantes sont les colonnes non nulles de la forme échelonnée constitue une base du sous-espace $Vect(\mathbf{v})$. En particulier le rang est le nombre de colonnes non nulles de la forme échelonnée.