Espaces vectoriels normés

Plan du chapitre

Plan du chapitre

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1.1

On appelle **norme** *sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

1. *axiome de séparation :* $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \iff x = 0_E$
2. *homogénéité :* $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda x) = |\lambda| \, N(x)$
3. *inégalité triangulaire :* $\forall x, y \in E, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y).$

On dit alors que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé.

Remarque : Les normes sont souvent notées $N(\,.\,)$, $\|\,.\,\|$, ou $|\,.\,|$. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme considérée, on note parfois simplement E l'espace vectoriel normé.

Proposition 1.2 (Inégalité triangulaire inversée)

Soit $(E, \|\,.\,\|)$ *un espace normé. Alors pour tous* $x, y \in E$, *on a*

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|.$$

Définition 1.3

Un vecteur x *d'un espace normé* E *est dit* **unitaire** *si* $\|x\| = 1$.

Plan du chapitre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 1.4 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) *est liée.*

Proposition 1.5

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, *on pose*

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|\,, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \quad et \quad \|x\|_\infty = \max_{k \in [\![1;n]\!]} |x_k|.$$

Les applications $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ *(norme euclidienne) et* $\|\,.\,\|_\infty$ *sont des normes sur* $\mathbb{K}^n$.

Remarque : Plus généralement, pour $p \in [1; +\infty[$, on peut montrer que l'application $\| \,.\, \|_p : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} \qquad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

définit une norme sur $\mathbb{K}^n$. De plus, on a

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \|x\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|x\|_p.$$

Plan du chapitre

Soit $\|\,.\,\|$ une norme sur E.

Définition 1.6

Soit $(E, \|\,.\,\|)$ un espace normé. On appelle **distance associée** *à la norme $\|\,.\,\|$ sur E l'application*

$$\begin{array}{rccc} d: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, y) & \longmapsto & \|x - y\|. \end{array}$$

Proposition 1.7

La distance d associée à une norme $\|\,.\,\|$ sur E vérifie :

- i) $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = d(y, x)$ *[symétrie]*
- ii) $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$ *[séparation]*
- iii) $\forall x, y, z \in E, \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *[inégalité triangulaire]* .

Définition 1.8

Soient $(E, \| \|)$ *un espace vectoriel normé. On appelle distance de* x *à une partie non vide* A *de* E *la borne inférieure*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}.$$

Remarque : Si $x \in A$, alors $d(x, A) = 0$ mais la réciproque est fausse.

Plan du chapitre

Définition 1.9

Soient $(E, \| \, . \, \|)$ *un espace normé,* $a \in E$ *et* $r > 0$*. On définit :*

- *la* **boule ouverte** *de centre* a *et de rayon* r *par* $B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$,
- *la* **boule fermée** *de centre* a *et de rayon* r *par* $\overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$,
- *la* **sphère** *de centre* a *et de rayon* r *par* $S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$.

Remarque : On a $\overline{B}(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$ (union disjointe).

Définition 1.10

Les boules de centre 0_E *et de rayon* 1 *sont appelées* **boules unités**.

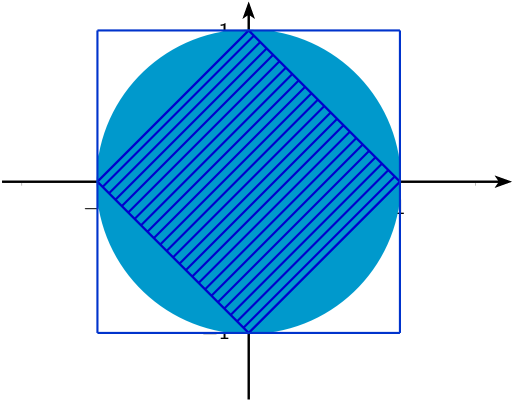


Figure – Boules unité de $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\|\,.\,\|_\infty$, $\|\,.\,\|_2$ et $\|\,.\,\|_1$.

Remarque : On peut voir que $B(a,r) = a + rB(0_E, 1)$ et $\overline{B}(a,r) = a + r\overline{B}(0_E, 1)$.

Proposition 1.11

Une boule B (ouverte ou fermée) est une partie **convexe***, c'est-à-dire que*

$$\forall x, y \in B, \quad \forall \theta \in [0;1], \quad (1-\theta)x + \theta y \in B.$$

Une sphère (de rayon $r > 0$) n'est pas convexe.

Plan du chapitre

Définition 1.12

Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite **bornée** *s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leq M.$$

Remarque : Une partie est bornée si et seulement elle est contenue dans une boule fermée de centre 0_E, cela équivaut au fait d'être contenue dans une boule fermée $\overline{B}(a, r)$ pour un certain $a \in E$.

Définition 1.13

Si A est une partie bornée non vide de E, on définit son **diamètre** *par :*

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in A\}.$$

Soit X un ensemble non vide et E un espace vectoriel normé.

Définition 1.14

On dit qu'une fonction vectorielle $f : X \longrightarrow E$ est **bornée** *lorsque son image l'est, i.e.*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad \|f(x)\| \leq M.$$

Proposition 1.15

Soient $f, g : X \longrightarrow E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si f et g sont bornées, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi.

Corollaire 1.16

L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des fonctions bornées de X dans E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(X, E)$ des fonctions de X dans E.

Plan du chapitre

Plan du chapitre

Proposition 2.1

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie peut être muni d'une norme.

Remarque : On peut ainsi construire des normes sur un espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ associées aux normes $\| \, . \, \|_p$ que l'on a vues sur $\mathbb{K}^n$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$N_p(x) = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_p.$$

Plan du chapitre

Soient X un ensemble non vide et $(E, \| \, . \, \|)$ un espace vectoriel normé. On rappelle que l'on note $\mathcal{B}(X, E)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans E.

Proposition 2.2

Pour toute fonction $f : X \longrightarrow E$ bornée, on définit

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

L'application $\| \, . \, \|_\infty$ définit une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$.

Autres exemples de dimension infinie à connaître :

- Soit E le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des séries numériques absolument convergentes. Les applications suivantes sont des normes sur E. Pour $u = \sum u_n$, on pose

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \sup\{|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

- Soient $a < b$ deux réels et $E = \mathcal{C}([a;b], \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{K}$. Cet espace est inclus dans l'ensemble des fonctions bornées de $[a;b]$ dans $\mathbb{K}$. Les applications suivantes sont des normes sur E :

$$\|\,.\,\|_\infty : f \longmapsto \sup_{t\in[a;b]} |f(t)|\,, \quad \|\,.\,\|_1 : f \longmapsto \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\text{et} \quad \|\,.\,\|_2 : f \longmapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}.$$

Plan du chapitre

Proposition 2.3

Soient $(E_1, N_1), \ldots, (E_p, N_p)$ des espaces normés et $E = E_1 \times \cdots \times E_p$. Les applications suivantes définies pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p) \in E$ par

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{p} N_k(x_k), \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} N_k(x_k)^2}$$
$$\text{et} \quad \|x\|_\infty = \max\{N_k(x_k) \mid k \in [\![1;p]\!]\}$$

définissent des normes sur l'espace produit E.

Remarque : Si rien n'est précisé, on munit E de la norme $\| \, . \, \|_\infty$.

Définition 2.4

L'espace vectoriel normé $(E, \| \, . \, \|_\infty)$ est appelé **espace normé produit** *des espaces normés $(E_1, N_1), \ldots, (E_p, N_p)$.*

Plan du chapitre

Plan du chapitre

Définition 3.1

Deux normes N_1 et N_2 sur un même espace E sont dites **équivalentes** *si*

$$\exists C_1, C_2 > 0, \quad \forall x \in E, \quad C_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq C_2 N_1(x).$$

Remarque : Puisque C_1 et C_2 sont **strictement positifs**, on a aussi,

$$\forall x \in E, \quad \frac{1}{C_2} N_2(x) \leq N_1(x) \leq \frac{1}{C_1} N_2(x)$$

donc les places de N_1 et N_2 peuvent être échangées dans la définition de deux normes équivalentes.

Théorème 3.2 (Équivalence des normes en dimension finie (admis))

Sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, les normes sont deux à deux équivalentes.

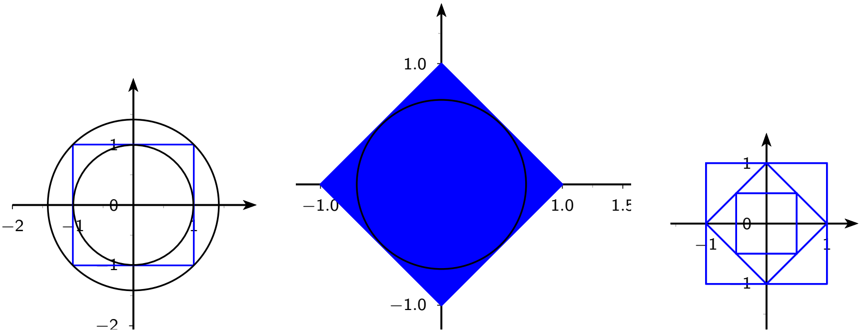
Remarque : Attention, ce résultat est faux en dimension infinie !

Plan du chapitre

Proposition 3.3

Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E alors toute boule de centre a pour l'une des normes est incluse et contient des boules de même centre a (mais de rayons différents) pour l'autre norme.

Dans $\mathbb{R}^2$: $\|\,.\,\|_\infty \leq \|\,.\,\|_2 \leq \sqrt{2}\|\,.\,\|_\infty$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\|\,.\,\|_1 \leq \|\,.\,\|_2 \leq \|\,.\,\|_1$, et $\|\,.\,\|_\infty \leq \|\,.\,\|_1 \leq 2\|\,.\,\|_\infty$



Plan du chapitre

Définition 3.4

On dit qu'une notion est invariante par passage à une norme équivalente si, lorsqu'elle est vérifiée dans un espace normé (E, N_1), elle l'est encore dans l'espace normé (E, N_2) quand N_2 est équivalente à N_1.

Remarque : Lorsque deux normes ne sont pas équivalentes, certaines propriétés peuvent être vraies pour une norme sans l'être pour l'autre.

Plan du chapitre

Plan du chapitre

Dans toute cette partie, $(E, \|\,.\,\|)$ désigne un espace vectoriel normé.

Définition 4.1

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E est **bornée** *s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|u_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 4.2

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E est **convergente** *s'il existe $\ell \in E$ tel que $\|u_n - \ell\| \longrightarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ est alors unique, on l'appelle limite de la suite $(u_n)_n$ et on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
On dit que la suite est **divergente** *dans le cas contraire.*

Remarque : La convergence d'une suite dans l'espace vectoriel normé E est par définition relative à la norme $\|\,.\,\|$ sur E. Elle n'est pas en général satisfaite pour une autre norme. En cas d'ambiguïté sur la norme choisie sur E, on parlera de convergence de la suite pour $\|\,.\,\|$ et on notera $u_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|\,.\,\|}{\longrightarrow}} \ell$.

Remarque : On dispose des équivalences :

$$\begin{aligned} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad &\Longleftrightarrow \quad u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0_E \\ &\Longleftrightarrow \quad \|u_n - \ell\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Plan du chapitre

Proposition 4.3

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ *alors* $\|u_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$. *Par conséquent, toute suite convergente est bornée.*

Preuve : D'après l'inégalité triangulaire inversée, on obtient

$$0 \leq |\|u_n\| - \|\ell\|| \leq \|u_n - \ell\| \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

d'où le résultat par théorème des gendarmes. On utilise ensuite le fait qu'une suite réelle convergente est bornée.

Proposition 4.4

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E convergeant respectivement vers ℓ et ℓ'. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda u_n + \mu v_n \longrightarrow \lambda\ell + \mu\ell' \quad \textit{quand } n \to +\infty.$$

En d'autres termes, l'ensemble des suites convergentes de E est un espace vectoriel, et l'application $(u_n)_n \longmapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est linéaire.

Preuve : On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned}
0 \leq \|(\lambda u_n + \mu v_n) - (\lambda\ell + \mu\ell')\| &= \|\lambda(u_n - \ell) + \mu(v_n - \ell')\| \\
&\leq |\lambda|\,\|u_n - \ell\| + |\mu|\,\|v_n - \ell'\| \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Proposition 4.5

Soient $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite numérique convergeant vers λ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers $\ell \in E$, alors

$$\lambda_n \cdot u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \cdot \ell.$$

Preuve : Sous les mêmes notations, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\lambda_n \cdot u_n - \lambda \cdot \ell\| &= \|\lambda_n \cdot u_n - \lambda_n \cdot \ell + \lambda_n \cdot \ell - \lambda \cdot \ell\| \\ &\leq |\lambda_n|\,\|u_n - \ell\| + |\lambda_n - \lambda|\,\|\ell\| \\ &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

puisque la suite $(\lambda_n)_n$ est convergente donc bornée.

Plan du chapitre

Proposition 4.6

Deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes, et celles-ci ont les mêmes limites pour les deux normes. En d'autres termes, si N et N' sont équivalentes, pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de E, on a l'équivalence :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{N}} \ell \iff u_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{N'}} \ell.$$

Remarque : Attention, si N_1 et N_2 sont deux normes sur E non équivalentes, il se peut qu'une suite converge pour une norme et diverge pour l'autre, voire qu'elle converge pour ces deux normes mais vers des limites différentes !

Plan du chapitre

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$u(n) = u_1(n)e_1 + \cdots + u_p(n)e_p.$$

Définition 4.7

Les suites scalaires $u_k = (u_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelées **suites coordonnées (ou composantes)** *de la suite vectorielle u dans la base e.*

Proposition 4.8

On a équivalence entre :

1. *la suite u converge,*
2. *les suites coordonnées $u_1, \dots, u_p$ convergent.*

De plus, si tel est le cas, on a
$$\lim_{n\to+\infty} u(n) = (\lim_{n\to+\infty} u_1(n))e_1 + \cdots + (\lim_{n\to+\infty} u_p(n))e_p.$$

Plan du chapitre

Soient $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des espaces vectoriels normés, et $E = E_1 \times \cdots \times E_p$. On a vu que l'on peut munir E des trois normes suivantes : pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$,

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{p} N_k(x_k), \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} N_k(x_k)^2}$$
$$\text{et} \quad \|x\|_\infty = \max\{N_k(x_k) \mid k \in [\![1; p]\!]\}.$$

Ces trois normes sont deux à deux équivalentes.

Soit $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u(n) = (u_1(n), \dots, u_p(n))$. Les suites vectorielles $u_k = (u_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelées suites coordonnées de la suite u.

Proposition 4.9

On a équivalence entre :

1. *la suite* $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge (pour la norme produit),*
2. *les suites coordonnées (ou composantes)* $u_k = (u_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent (respectivement pour* N_k*).*

Si tel est le cas, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} u(n) = (\lim_{n\to+\infty} u_1(n), \ldots, \lim_{n\to+\infty} u_p(n)).$$