

Topologie des espaces vectoriels normés

dejou@math.univ-lyon1.fr

1 Parties ouvertes et fermées

- Parties ouvertes
- Parties fermées

2 Intérieur, adhérence et densité

- Intérieur
- Adhérence
- Frontière
- Densité

3 Parties compactes

- Suites extraites
- Compacts

Dans toute la suite, $(E, \| \cdot \|)$ désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel normé. Les notions qui suivent ne seront pas modifiées lorsqu'on passe d'une norme à une norme équivalente. En particulier, si l'espace E est de dimension finie, elles ne dépendent pas de la norme choisie.

1. Parties ouvertes et fermées

1.1. Parties ouvertes

Définition 1.1

On appelle **voisinage** d'un élément $x \in E$ toute partie $V \subset E$ vérifiant :

$$\exists r > 0, \quad B(x, r) \subset V.$$

Définition 1.2

Une partie \mathcal{U} de E est dite **ouverte** si elle est voisinage de chacun de ses points, i.e.

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset \mathcal{U}.$$

On dit encore que \mathcal{U} est un ouvert de E .

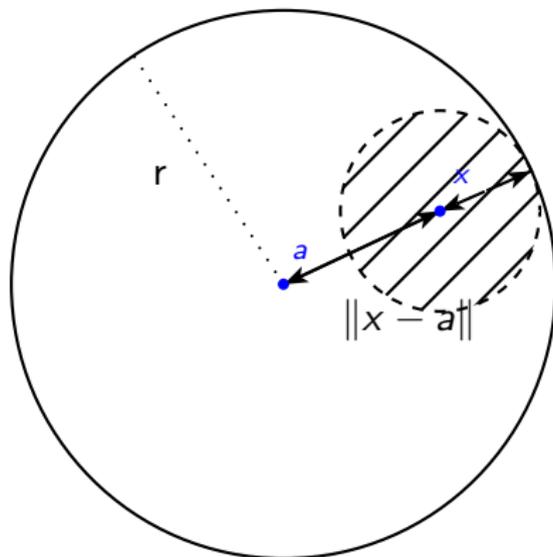


Figure – Une boule ouverte est ouverte

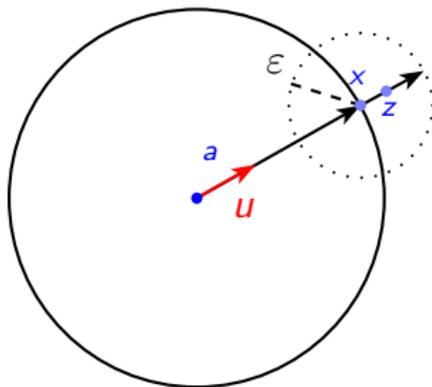


Figure – Une sphère n'est pas ouverte.

Proposition 1.3

Une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

Proposition 1.4

*Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.*

Proposition 1.5

Si $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_p$ sont des ouverts des espaces normés $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ alors $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_p$ est un ouvert de l'espace normé produit $E = E_1 \times \dots \times E_p$ muni de la norme produit.

Démonstration : Commençons par préciser les boules de E . Notons N_1, \dots, N_p les normes sur E_1, \dots, E_p et $\|\cdot\|$ la norme sur E définie pour $x = (x_1, \dots, x_p) \in E$ par $\|x\| = \max_{1 \leq k \leq p} N_k(x_k)$. Soit $a = (a_1, \dots, a_p) \in E$ et $r > 0$,

$$\begin{aligned} x \in B(a, r) &\iff \|x - a\| = \max_{1 \leq k \leq p} N_k(x_k) < r \\ &\iff \forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, N_k(x_k) < r \\ &\iff \forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, x_k \in B_k(a_k, r) \end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$B(a, r) = \prod_{k=1}^p B_k(a_k, r).$$

Soient $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_p$ des ouverts de E_1, \dots, E_p et $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_p$. Soit $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{U}$. Pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $a_k \in \mathcal{U}_k$, or \mathcal{U}_k est ouvert, donc il existe $r_k > 0$ tel que $B_k(a_k, r_k) \subset \mathcal{U}_k$. Considérons alors

$$r = \min\{r_k \mid k \in \llbracket 1; p \rrbracket\} > 0.$$

Pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $B_k(a_k, r) \subset \mathcal{U}_k$, donc

$$B(a, r) = \prod_{k=1}^p B_k(a_k, r) \subset \prod_{k=1}^p \mathcal{U}_k = \mathcal{U}.$$

1.2. Parties fermées

Définition 1.6

Une partie F de E est dite **fermée** si son complémentaire (dans E) est un ouvert. On dit aussi que F est un fermé de E .

Remarque : Pour une partie $X \subset E$, la notation probabiliste \bar{X} du complémentaire est à proscrire : elle est utilisée pour une autre notion en topologie, l'adhérence, que l'on verra dans la suite. On notera donc X^c s'il n'y a pas de confusion possible sur l'espace normé E , ou $E \setminus X$.

Proposition 1.7

Une intersection (finie ou infinie) de fermés de E est un fermé de E .

Proposition 1.8

Une union **finie** de fermés de E est un fermé de E .

Proposition 1.9 (Caractérisation séquentielle des fermés)

Une partie F de E est fermée si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ appartient à F , ce qui s'écrit encore :

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \quad \Rightarrow \quad \ell \in F.$$

Remarque : Attention, cela ne signifie pas que dans un fermé toutes les suites convergent !

Proposition 1.10

Si F_1, \dots, F_p sont des fermés des espaces normés E_1, \dots, E_p alors $F = F_1 \times \dots \times F_p$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé produit $E = E_1 \times \dots \times E_p$ pour la norme produit.

2. Intérieur, adhérence et densité

2.1. Intérieur

Définition 2.1

Un élément $a \in E$ est dit **intérieur** à une partie $X \subset E$ si X est un voisinage de a , i.e. $\exists r > 0, B(a, r) \subset X$.

L'intérieur de X , noté $\overset{\circ}{X}$, est l'ensemble de tous les points intérieurs à X , c'est-à-dire $\overset{\circ}{X} = \{x \in E \mid \exists r > 0, B(x, r) \subset X\}$.

Remarque : On a toujours l'inclusion $\overset{\circ}{X} \subset X$.

Proposition 2.2

Une partie $X \subset E$ est ouverte si et seulement si $\overset{\circ}{X} = X$.

Proposition 2.3

Soit X une partie de E , alors $\overset{\circ}{X}$ est la réunion de tous les ouverts inclus dans X . Par conséquent, $\overset{\circ}{X}$ est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans X .

2.2. Adhérence

Définition 2.4

On dit qu'un élément $a \in E$ est **adhérent** à une partie $X \subset E$ si

$$\forall r > 0, \quad B(a, r) \cap X \neq \emptyset.$$

On appelle **adhérence** de X l'ensemble, noté \overline{X} , des éléments adhérents à X .

Remarque : On a toujours l'inclusion $X \subset \overline{X}$ puisque pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, $x \in B(x, r) \cap X$.

Proposition 2.5

Soit X une partie de E , alors

$$E \setminus \overline{X} = (E \setminus X)^\circ \quad \text{et} \quad E \setminus X^\circ = \overline{E \setminus X}.$$

Proposition 2.6

Une partie $X \subset E$ est fermée si et seulement si $\overline{X} = X$.

Proposition 2.7

Soit X une partie de E , alors \overline{X} est l'intersection de tous les fermés contenant X . Par conséquent, \overline{X} est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant X .

Proposition 2.8 (Caractérisation séquentielle des points adhérents)

Soient X une partie de E et $a \in E$. On a équivalence entre :

- ❶ a est adhérent à X ,
- ❷ il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers a .

2.3. Frontière

Définition 2.9

On appelle **frontière** d'une partie X de E l'ensemble $\text{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X}$.

Remarque : On peut voir que

$$\text{Fr}(X) = \overline{X} \cap (E \setminus \overset{\circ}{X}) = \overline{X} \cap \overline{E \setminus X} = \text{Fr}(E \setminus X)$$

Cette écriture permet aussi de démontrer que $\text{Fr}(X)$ est un fermé de E .

2.4. Densité

Definition 1

Une partie X de E est dite **dense** si $\overline{X} = E$.

Proposition 2.10

Soit X une partie de E . On a équivalence entre :

- i) X est une partie dense de E ,
- ii) $\forall a \in E, \forall r > 0, B(a, r) \cap X \neq \emptyset$,
- iii) $\forall a \in E, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$.

3. Parties compactes

3.1. Suites extraites

Définition 3.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On appelle **suite extraite** (ou sous-suite) de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Remarque : Si $w = (w_n)_n$ est une suite extraite de $v = (v_n)_n$, elle-même extraite de $u = (u_n)_n$, alors la suite w est une suite extraite de u . En effet, notons $v = (u_{\varphi(n)})_n$ et $w = (v_{\psi(n)})_n$ avec $\varphi, \psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissantes, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$w_n = v_{\psi(n)} = u_{\varphi(\psi(n))} = u_{\varphi \circ \psi(n)}$$

avec $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante comme composée de deux fonctions strictement croissantes.

Théorème 3.2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . Si $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in E$, alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge aussi vers ℓ .

3.2. Compacts

Définition 3.3

Une partie K de E est dite **compacte** si toute suite d'éléments de K possède une sous-suite convergente dans K , i.e.

$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}, \exists \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in K$.

On dit aussi que K est un compact de E .

Proposition 3.4

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Théorème 3.5

Si E est un espace de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.

Corollaire 3.6 (Généralisation du théorème de Bolzano-Weierstrass)

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée admet une sous-suite convergente.