Dans tout le chapitre, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) par $\|\,.\,\|_E$ et $\|\,.\,\|_F$. Les notions qui vont suivre sont inchangées lorsque l'on passe d'une norme à une norme équivalente. En particulier, elles ne dépendent pas de la norme lorsque les espaces sont de dimensions finies.

X désigne une partie de E. On s'intéresse ici aux applications $f : X \subset E \longrightarrow F$.

Définition 1

Soient X une partie de E et $a \in E$. On dit que a est un ***point adhérent*** *à X s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers a.*

Définition 2

Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$ et a un point adhérent à X. On dit que f ***tend vers*** *$\ell \in F$ en a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ est alors unique, et on note $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 3 (*Caractérisation séquentielle*)

Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$, $\ell \in F$ et a un point adhérent à X. On a équivalence entre

(i). $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$,

(ii). $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 4

Soient $f, g : X \subset E \longrightarrow F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell'$, alors $(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda\ell + \mu\ell'$.

Proposition 5

Soient $\alpha : X \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \subset E \longrightarrow F$. Si $\alpha(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{K}$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, alors $(\alpha f)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda\ell$.

Proposition 6 (*Composition des limites*)

Soient G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $f : X \subset E \longrightarrow F$ et $g : Y \subset F \longrightarrow G$ avec $f(X) \subset Y$. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ et $g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} \ell$, alors $g \circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Soient $F_1, \ldots, F_p$ des espaces vectoriels normés respectivement par $N_1, \ldots, N_p$ et $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ l'espace vectoriel normé produit muni de la norme infinie :

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_p) \in F, \quad \|x\| = \max\{N_i(x_i) \mid i \in [\![1; p]\!]\}.$$

Considérons $f : X \subset E \longrightarrow F$. Pour tout $x \in F$, on peut écrire $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$ avec $f_i(x) \in F_i$. Les applications $f_1, \ldots, f_p$ sont appelées applications coordonnées ou composantes de f.

Proposition 7

Soit $a \in E$ un point adhérent à X. On a équivalence entre :

(i). f tend vers $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$ en a,

(ii). pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, f_i tend vers ℓ_i en a.

Définition 8

soit $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow F$ avec X une partie de $\mathbb{R}$ non majorée. On dit que f tend vers $\ell \in F$ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad x \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. On définit de manière analogue $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell$, pour $X \subset \mathbb{R}$ non minorée.

Définition 9

Soit $f : X \subset E \longrightarrow F$ avec X une partie de E non bornée. On dit que f tend vers $\ell \in F$ lorsque $\|x\|_E \to +\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad \|x\|_E \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{\|x\|_E\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Définition 10

Soit $f : X \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ et a un point adhérent à X. On dit que f tend vers $+\infty$ en a si

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M.$$

On note alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$. On définit de manière analogue $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, etc...

Définition 11

On dit que $f : X \subset E \longrightarrow F$ est **continue** *en $a \in X$ si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$, i.e. si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon.$$

Théorème 12

Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$ et $a \in X$. On a équivalence entre :

(i). f est continue en a,

(ii). $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

Définition 13

On dit que $f : X \subset E \longrightarrow F$ est **continue** *sur X si f est continue en tout point $a \in X$. On note $\mathcal{C}(X, F)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans F.*

Définition 14

Une application $f : X \subset E \longrightarrow F$ est dite **lipschitzienne** *s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\forall x, y \in X, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

Proposition 15

Les applications lipschitziennes sont continues.

Proposition 16

Soient $f, g : X \subset E \longrightarrow F$ continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur X.

Proposition 17

Soient $\alpha : X \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \subset E \longrightarrow F$ continues sur X. Le produit $\alpha \cdot f$ est continu sur X.

Proposition 18

Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$ et $g : Y \subset F \longrightarrow G$ vérifiant $f(X) \subset Y$. Si f et g sont continues, la composée

$g \circ f$ est continue sur X.

Proposition 19

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_d) \in D$. Pour tout $j \in [\![2; d-1]\!]$, on définit les applications partielles

$$f_{a,j} : \begin{array}{ccc} D_{a,j} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_d) \end{array} \quad \text{où} \quad D_{a,j} = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_d) \in D\}$$

et, en notant $D_{a,1} = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, a_2, \ldots, a_d) \in D\}$ et $D_{a,d} = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \ldots, a_{d-1}, t) \in D\}$,

$$f_{a,1} : \begin{array}{ccc} D_{a,1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & f(t, a_2, \ldots, a_d) \end{array} \quad \text{et} \quad f_{a,d} : \begin{array}{ccc} D_{a,d} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_{d-1}, t) \end{array}$$

Si f est continue en $a \in D$, alors l'application partielle $f_{a,j}$ est continue en a_j, pour tout $j \in [\![1; d]\!]$.

Proposition 20

Si F est de dimension finie, alors $f : X \subset E \longrightarrow F$ est continue si et seulement si ses fonctions coordonnées dans une base de F le sont.

Proposition 21

Soit $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ un espace normé produit, et $f : X \subset E \longrightarrow F$. On peut noter $f = (f_1, \ldots, f_p)$ avec $f_i : X \subset E \longrightarrow F_i$ pour tout $i \in [\![1; p]\!]$. La fonction f est continue sur X si et seulement si ses composantes f_i le sont.

Théorème 22

Soient $K \subset E$ un compact et $f : K \longrightarrow F$ une application continue. Alors $f(K)$ est un compact de F.
En d'autres termes, l'image d'une partie compacte par une application continue est une partie compacte.

Corollaire 23

Soit $f : K \subset E \longrightarrow F$. Si K est une partie compacte de E et f continue, alors f est bornée.

Théorème 24 (*Théorème des bornes atteintes*)

Soit $f : K \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue où K est un compact non vide de E. Alors f est bornée et atteint ses bornes (elle admet un minimum et un maximum).

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème 25

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i). *u est continue,*
- (ii). *u est continue en 0_E,*
- (iii). $\exists k \geq 0$, $\forall x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$,
- (iv). *u est bornée sur la boule unité fermée,*
- (v). *u est bornée sur la sphère unité,*
- (vi). *u est lipschitzienne,*

Définition 26

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ continue. On définit la norme subordonnée aux normes $\| \,.\, \|_E$ et $\| \,.\, \|_F$ de u par l'une des trois caractérisations équivalentes :

$$\begin{aligned} |||u||| &= \sup\{\|u(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E \leq 1\} \\ &= \sup\{\|u(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E, x \neq 0_E\right\}. \end{aligned}$$

Démonstration : Tout d'abord, au vu des caractérisations équivalentes de la continuité de u, ces trois bornes supérieures existent et sont finies. Montrons que ces trois quantités sont égales. Pour cela, on introduit les notations suivantes :

$$A = \sup\{\|u(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E \leq 1\}, \quad B = \sup\{\|u(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E = 1\},$$
$$\text{et } C = \sup\left\{\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E, x \neq 0_E\right\}.$$

Il est clair que $B \leq A$, $B \leq C$. De plus, pour $x \in E, x \neq 0_E$, on a $\dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\| u\left(\dfrac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F$ avec $\left\|\dfrac{x}{\|x\|_E}\right\|_E = 1$, donc $C \leq A$ et $C \leq B$ (ce qui démontre $C = B$). Il reste à montrer que $A \leq B$, ou $A \leq C$. Soit $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$, $x \neq 0_E$. On a alors

$$\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\| u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leq B \quad \text{d'où} \quad \|u(x)\|_F \leq B \underbrace{\|x\|_E}_{\leq 1} \leq B,$$

inégalité encore valable pour $x = 0_E$, ce qui donne $A \leq B$ par définition de la borne supérieure, et ainsi les égalités voulues. ∎

Proposition 27

La norme subordonnée définit une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\{u \in \mathcal{L}(E,F) \mid u$ continue $\}$.

Démonstration : Notons $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble $\{u \in \mathcal{L}(E,F) \mid u$ continue $\}$.On a déjà expliqué que $|||\,.\,|||$ est bien définie de $\mathcal{L}_c(E,F)$ dans $\mathbb{R}^+$.

- Soit $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ telle que $|||u||| = 0$, alors pour tout $x \in E$, $x \neq 0_E$, on a $0 \leq \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq 0$ d'où $\|u(x)\|_F = 0$ (égalité encore valable si $x = 0_E$), et ainsi u est l'application nulle.
- Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$, alors

$$|||\lambda u||| = \sup\{\|\lambda u(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E \leq 1\} = |\lambda| \, |||u|||.$$

- Soient $u, v \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $x \in E$, $\|x\|_E \leq 1$, on a

$$\|(u+v)(x)\|_F = \|u(x) + v(x)\|_F \leq \|u(x)\|_F + \|v(x)\|_F \leq |||u||| + |||v|||$$

  donc $|||u||| + |||v|||$ est un majorant de l'ensemble $\{\|(u+v)(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E \leq 1\}$. Puisque la borne supérieure est le plus petit des majorants, on en déduit que $|||u+v||| \leq |||u||| + |||v|||$, ce qui démontre que $|||\,.\,|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$. ∎

Théorème 28

Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. On rappelle que $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ est bilinéaire si pour tout $y \in F$, l'application partielle $\varphi(\,.\,, y) : x \in E \longmapsto \varphi(x, y)$ est linéaire, et pour tout $x \in E$, l'application partielle $\varphi(x, \,.\,) : y \in F \longmapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.

Théorème 29

Soit $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i). *φ est continue,*

(ii). *φ est continue en $(0_E, 0_F)$,*

(iii). $\exists k \geq 0,\ \forall (x, y) \in E \times F,\ \|\varphi(x, y)\|_G \leq k\|x\|_E\|y\|_F$.

Démonstration :

- $(i) \Rightarrow (ii)$: il est clair que si φ est continue sur $E \times F$, elle l'est en particulier en $(0_E, 0_F)$.
- $(ii) \Rightarrow (iii)$: Supposons φ continue en $(0_E, 0_F)$, par définition de la continuité avec $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad \|(x, y)\|_{E\times F} \leq \eta \Rightarrow \|\varphi(x, y)\|_G \leq 1.$$

Posons $k = \dfrac{1}{\eta^2} \in \mathbb{R}^+$. Montrons que pour tout $(x, y) \in E \times F$, $\|\varphi(x, y)\|_G \leq k\|x\|_E\|y\|_F$. Soit $(x, y) \in E \times F$. Si $x = 0_E$ ou $y = 0_F$, l'inégalité est claire puisque les deux termes intervenant sont nuls (par bilinéarité de φ). Sinon, on pose $x' = \dfrac{\eta}{\|x\|_E}x$ et $y' = \dfrac{\eta}{\|y\|_F}y$. on a alors $\|(x', y')\|_{E\times F} = \max(\|x'\|_E, \|y'\|_F) = \eta$ donc $\|\varphi(x', y')\|_G \leq 1$. Or $\|\varphi(x', y')\|_G = \dfrac{\eta^2}{\|x\|_E\|y\|_F}\|\varphi(x, y)\|_G$ par bilinéarité de φ, ce qui donne au final : $\|\varphi(x, y)\| \leq \dfrac{1}{\eta^2}\|x\|_E\|y\|_F = k\|x\|_E\|y\|_F$.

- $(iii) \Rightarrow (i)$: Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall (x, y) \in E \times F$, $\|\varphi(x, y)\|_G \leq k\|x\|_E\|y\|_F$. Soit $(x_0, y_0) \in E \times F$.

$$\begin{aligned}
\|\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0)\|_G &= \|\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y) + \varphi(x_0, y) - \varphi(x_0, y_0)\| \\
&\leq \|\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y)\|_G + \|\varphi(x_0, y) - \varphi(x_0, y_0)\|_G \\
&\leq \|\varphi(x - x_0, y)\|_G + \|\varphi(x_0, y - y_0)\|_G \\
&\leq k\|x - x_0\|_E\|y\|_F + k\|y - y_0\|_F\|x_0\|_E \\
&\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

ce qui prouve que φ est continue en (x_0, y_0). ∎

Corollaire 30

Si E et F sont de dimensions finies, toute application bilinéaire au départ de $E \times F$ est continue.

Démonstration : Soit $\varphi : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire. Si $E = \{0_E\}$ ou $F = \{0_F\}$, la fonction φ est nulle, donc continue. Sinon, on suppose que $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$ avec $n, p \in \mathbb{N}^*$. On introduit une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E et une base $f = (f_1, \dots, f_p)$ de F, et on considère $\|\,.\,\|_E = \|\,.\,\|_{\infty,e}$ et $\|\,.\,\|_F = \|\,.\,\|_{\infty,f}$. Pour $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ et $y = \sum_{j=1}^{p} y_j f_j \in F$, on a par bilinéarité de φ :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} x_i y_j \varphi(e_i, f_j)$$

ce qui donne

$$\|\varphi(x, y)\|_G \leq k\|x\|_E\|y\|_F \quad \text{où l'on a posé } k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \|\varphi(e_i, f_j)\|_G.$$

∎