Définition 1

On appelle suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$ toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(f_n)_{n\geq n_0}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$) vérifiant pour tout n, $f_n : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$.

Définition 2

*On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** sur $A \subset D$ vers $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ si pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$, c'est-à-dire*

$$\forall x \in A, \quad f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall x \in A, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

Définition 3

*Si $(f_n)_n$ converge simplement sur A vers f, on dit que f est la **limite simple** sur A de la suite (f_n).*

Proposition 4

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles convergeant simplement vers f sur $A \subset D$.

1. *Si f_n est positive sur A pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est positive sur A.*
2. *Si f_n est croissante sur A pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est croissante sur A.*
3. *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est convexe sur un intervalle $I \subset A$, alors f est convexe sur I.*

Définition 5

*Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** sur $A \subset D$ vers $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

Théorème 6

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$, $A \subset D$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$. On a équivalence entre :

1. *$(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers f,*
2. *il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_0$, la fonction $f_n - f$ est bornée, et*

$$\|f_n - f\|_{\infty,A} = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\geq N_0}}{\longrightarrow} 0.$$

Théorème 7 (*Convergence uniforme implique convergence simple*)

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$ et $A \subset D$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ sur A, alors elle converge simplement vers f sur A.

Proposition 8 (*Critère de Cauchy uniforme*)

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D vers $\mathbb{K}$ converge uniformément sur $A \subset D$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in A, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad (p \geq q \geq N \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon)$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad (p \geq q \geq N \Rightarrow\ f_p - f_q \text{ est bornée et } \|f_p - f_q\|_{\infty,A} \leq \varepsilon).$$

Proposition 9

Si pour tout n, f_n est bornée sur A, et la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A, alors f est bornée sur A.

Théorème 10

Soit $a \in A$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ sur A, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.

Corollaire 11

Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur A, alors f est continue sur A.

Théorème 12 (*Théorème de la double limite*)

Soit a un point adhérent à A (ou $a = +\infty$ si A n'est pas majoré, $a = -\infty$ si A n'est pas minoré).

1. *Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ sur A,*
2. *s'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, la fonction f_n admet une limite finie en a, notée ℓ_n,*

alors la suite numérique $(\ell_n)_{n \geq N_0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, la fonction f a une limite en a, et ces deux limites sont égales :

$$\lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

Théorème 13

Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a;b]$ vers $\mathbb{K}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{K}$, alors la fonction limite f est continue sur $[a;b]$ et la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Autrement dit,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Définition 14

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $(a_i)_{i \in [\![0;p]\!]}$ de $[a;b]$ (c'est-à-dire une suite finie $(a_i)_{i \in [\![0;p]\!]}$ telle que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_i < \cdots < a_p = b$) telle que, pour tout $i \in [\![0; p-1]\!]$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ admet un prolongement continu sur $[a_i; a_{i+1}]$.

Théorème 15

Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $[a;b]$ vers $\mathbb{K}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $[a;b]$ et si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur

$[a;b]$ vers une fonction f **continue par morceaux**, *alors la suite* $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Définition 16

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. La fonction f est dite continue par morceaux *sur I si elle continue par morceaux sur tout segment de I.*

Théorème 17 (*Théorème de convergence dominée (admis)*)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

(i). Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I,

(ii). si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux,

(iii). s'il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x) \qquad \textit{(hypothèse de domination)}$$

alors les fonctions f_n et f sont (absolument) intégrables sur I et

$$\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lemme 18

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de I vers $\mathbb{K}$ et $a \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n la primitive de f_n sur I s'annulant en a,

$$\textit{i.e.} \quad F_n : x \in I \longmapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f, alors la suite de fonctions $(F_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers

$$F : x \in I \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 19

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que

(i). pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

(ii). la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement en un point $a \in I$,

(iii). la suite de fonctions $(f_n')_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g,

alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et de dérivée $f' = g$.

Corollaire 20

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que

(i). *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,*

(ii). *la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$,*

(iii). *la suite de fonctions $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$,*

alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers f, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Théorème 21

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

(i). *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I,*

(ii). *pour tout $k \in [\![0; p-1]\!]$, la suite de fonctions $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge simplement sur I vers une fonction g_k,*

(iii). *la suite de fonctions $\left(f_n^{(p)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_p,*

alors la limite simple $f = g_0$ de $(f_n)_n$ sur I est de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout $k \in [\![0; p]\!]$, $f^{(k)} = g_k$ (limite simple de la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$).