On s'intéresse à des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. D désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 1

On appelle suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$ toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou $(f_n)_{n\geq n_0}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$) vérifiant pour tout n, $f_n : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$.

Définition 2

*On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** sur $A \subset D$ vers $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ si pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$, c'est-à-dire*

$$\forall x \in A, \quad f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

ce qui s'écrit encore

$$\forall x \in A, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

Définition 3

*Si $(f_n)_n$ converge simplement sur A vers f, on dit que f est la **limite simple** sur A de la suite (f_n).*

Proposition 4

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles convergeant simplement vers f sur $A \subset D$ vers f.

1. *Si f_n est positive sur A pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est positive sur A.*
2. *Si f_n est croissante sur A pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est croissante sur A.*
3. *Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est convexe sur un intervalle $I \subset A$, alors f est convexe sur I.*

Définition 5

*Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** sur $A \subset D$ vers $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

Théorème 6

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$ et $A \subset D$. On a équivalence entre :

1. *$(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$,*
2. *il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_0$, la fonction $f_n - f$ est bornée, et*

$$\|f_n - f\|_{\infty,A} = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\geq N_0}}{\longrightarrow} 0.$$

Théorème 7 (*Convergence uniforme implique convergence simple*)

Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$ et $A \subset D$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A, alors elle converge simplement vers f sur A.

Techniques d'étude de la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_n$ sur $A \subset D$

1. On commence par étudier la convergence simple sur A de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ afin de déterminer un candidat f pour la limite uniforme. S'il n'y a pas convergence simple, il n'y aura en particulier pas convergence uniforme.

2. Première méthode : Pour n fixé, on étudie les variations de la fonction $f_n - f$ sur A afin de déterminer le sup et l'inf de la fonction (qui peuvent être infinis).
   - S'il n'est pas possible de trouver un rang N_0 à partir duquel $f_n - f$ est bornée sur A, il n'y a pas convergence uniforme.
   - Si $f_n - f$ est bornée (au moins à partir d'un certain rang N_0), l'étude de variation donne le calcul explicite de $\|f_n - f\|_{\infty,A} = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$ (en n'oubliant pas de remettre la valeur absolue...) : on a alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur A si et seulement si $\|f_n - f\|_{\infty,A}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
3. Deuxième méthode :
   - Si on pense qu'il y a convergence uniforme sur A :
     on essaie de majorer la quantité $|f_n(x) - f(x)|$ par quelque chose **indépendant de** x qui tend vers 0. Si on arrive à trouver une suite réelle $(\alpha_n)_n$ telle que
     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in A, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \quad \text{avec} \quad \alpha_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
     alors puisque le sup est le plus petit des majorants, on obtient
     $$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \|f_n - f\|_{\infty,A} \leq \alpha_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
     et on conclut à l'aide du théorème des gendarmes.
   - Si on pense qu'il n'y a pas convergence uniforme :
     on cherche une suite $(x_n)_n$ **d'éléments de** A telle que $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ ne tende pas vers zéro. Alors comme chaque $x_n \in A$, on a
     $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n - f\|_{\infty,A} \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$$
     ce qui montre que $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément sur A.

Proposition 8 (*Critère de Cauchy uniforme*)

Une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de D vers $\mathbb{K}$ converge uniformément sur $A \subset D$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in A, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad (p \geq q \geq N \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon)$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad (p \geq q \geq N \Rightarrow \ f_p - f_q \text{ est bornée et } \|f_p - f_q\|_{\infty,A} \leq \varepsilon).$$

Démonstration :

- "$\Rightarrow$" : Supposons que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur A, alors il existe une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que
  $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
  Soit $\varepsilon > 0$ fixé, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
  $$\forall x \in A, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$
  Ainsi, pour tous entiers p, q tels que $p \geq q \geq N$, pour tout $x \in A$, on a
  $$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f_q(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

- "$\Rightarrow$" : Supposons que la suite de fonctions $(f_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme. Soit $x \in A$, alors comme $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_{\infty,A}$, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ qui est complet, donc elle converge vers un élément noté $f(x)$. Par suite, $(f_n)_n$ converge simplement sur A vers la fonction f. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in A$, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$,

$$p \geq q \geq N \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

Soit $q \geq N$, on a alors

$$\forall x \in A, \forall p \geq q, \quad |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon,$$

ce qui donne en faisant tendre p vers $+\infty$, par convergence simple de $(f_n)_n$ et continuité de la valeur absolue

$$\forall x \in A, |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$$

et démontre la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f. ■

Proposition 9

Si pour tout n, f_n est bornée sur A, et la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A, alors f est bornée sur A.

Théorème 10

Soit $a \in A$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ sur A, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.

Corollaire 11

Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur A, alors f est continue sur A.

Théorème 12 (*Théorème de la double limite*)

Soit a un point adhérent à A (ou $a = +\infty$ si A n'est pas majoré, $a = -\infty$ si A n'est pas minoré).

1. *Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ sur A,*
2. *si pour tout $n \geq N_0$, la fonction f_n admet une limite ℓ_n finie en a,*

alors la suite numérique $(\ell_n)_{n \geq N_0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$, la fonction f a une limite en a, et ces deux limites sont égales :

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x).$$

Démonstration :

- Commençons par montrer que la suite $(\ell_n)_n$ est de Cauchy. Puisque $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A, elle vérifie le critère de Cauchy uniforme : soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in A, \quad \forall p, q \in \mathbb{N}, \quad p \geq q \geq N \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

En fixant $p \geq q \geq N$, puis en faisant tendre x vers a, on obtient par continuité de la valeur absolue : $|\ell_p - \ell_q| \leq \varepsilon$, ce qui montre que la suite $(\ell_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ qui est complet, donc elle converge vers un certain $\ell \in \mathbb{K}$.

- Montrons maintenant que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$. Pour tout $x \in A$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - \ell| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell| \\ &\leq \|f - f_n\|_{\infty,A} + |f_n(x) - \ell_n| + |\ell_n - \ell| . \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow \|f - f_n\|_{\infty,A} \leq \varepsilon.$$

De même, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N' \Rightarrow |\ell_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n = \max(N, N')$, on a

$$|f(x) - \ell| \leq 2\varepsilon + |f_n(x) - \ell_n|.$$

Exploitons le fait que $f_n(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_n$. Si $a \in \mathbb{R}$, alors il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in A, \quad |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f_n(x) - \ell_n| \leq \varepsilon,$$

ce qui entraîne

$$\forall x \in A, \quad |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq 3\varepsilon.$$

et démontre l'existence de la limite de f en a et l'égalité voulue. Si $a = +\infty$, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in A, \quad x \geq M \Rightarrow |f_n(x) - \ell_n| \leq \varepsilon,$$

et on conclut de la même manière (cas similaire si $a = -\infty$). ■

Théorème 13

Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a;b]$ vers $\mathbb{K}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{K}$, alors la fonction limite f est continue sur $[a;b]$ et la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Définition 14

Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $(a_i)_{i\in[\![0;p]\!]}$ de $[a;b]$ (c'est-à-dire une suite finie $(a_i)_{i\in[\![0;p]\!]}$ telle que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_i < \cdots < a_p = b$) telle que, pour tout $i \in [\![0;p-1]\!]$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ admet un prolongement continu sur $[a_i; a_{i+1}]$.

Théorème 15

*Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $[a;b]$ vers $\mathbb{K}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $[a;b]$ et si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction f **continue par morceaux**, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n ß\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Théorème 16 (*Théorème de convergence dominée (admis)*)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$.

(i). Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I,

(ii). si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux,

(iii). s'il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur I vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq \varphi(x) \qquad \textit{(hypothèse de domination)}$$

alors les fonctions f_n et f sont (absolument) intégrables sur I et

$$\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lemme 17

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de I vers $\mathbb{K}$ et $a \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n la primitive de f_n sur I s'annulant en a,

$$\textit{i.e.} \quad F_n : x \in I \longmapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f, alors la suite de fonctions $(F_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers

$$F : x \in I \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 18

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que

(i). pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

(ii). la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement en un point $a \in I$,

(iii). la suite de fonctions $(f'_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g,

alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et de dérivée $f' = g$.

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $g_n = f'_n$ de sorte que g est en particulier la limite simple sur I de $(g_n)_n$ et notons $f(a)$ la limite de la suite $(f_n(a))_n$. On considère

$$G_n : x \in I \longmapsto \int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par le Lemme précédent, $(G_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction $G : x \in I \longmapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. L'application G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifie $G' = g$.

D'autre part, on a, pour tout $x \in I$,

$$G_n(x) = \int_a^x g_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f'_n(t)\,\mathrm{d}t = f_n(x) - f_n(a).$$

Puisque la suite de fonctions $(G_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers G, G est en particulier sa limite simple (sur I tout entier), ce qui entraîne

$$f_n(x) = G_n(x) + f_n(a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} G(x) + f(a).$$

Ainsi $(f_n)_n$ converge simplement sur I vers la fonction $f : x \in I \longmapsto G(x) + f(a)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et vérifie $f' = G' = g$.

De plus, soit $[\alpha;\beta]$ un segment inclus dans I. Pour tout $x \in [\alpha;\beta]$, on a

$$f_n(x) - f(x) = G_n(x) + f_n(a) - (G(x) + f(a)) = G_n(x) - G(x) + f_n(a) - f(a)$$

d'où

$$\|f_n - f\|_{\infty,[\alpha;\beta]} \leq \|G_n - G\|_{\infty,[\alpha;\beta]} + |f_n(a) - f(a)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par convergence simple de $(f_n)_n$ en a et convergence uniforme de $(G_n)_n$ sur $[\alpha;\beta]$, ce qui montre que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[\alpha;\beta]$. ■

Théorème 19

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

- (i). *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I,*
- (ii). *pour tout $k \in [\![0;p-1]\!]$, la suite de fonctions $\left(f_n^{(k)}\right)_n$ converge simplement sur I vers une fonction g_k,*
- (iii). *la suite de fonctions $\left(f_n^{(p)}\right)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_p,*

alors la limite simple $f = g_0$ de $(f_n)_n$ sur I est de classe $\mathcal{C}^p$ et pour tout $k \in [\![0;p]\!]$, $f^{(k)} = g_k$ (limite simple de la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_n$).