

$E$  désigne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $U$  un ouvert de  $E$ .

### Définition 1

Soit  $D$  une partie quelconque de  $E$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à valeurs réelles.

- (i) La fonction  $f$  admet un **minimum global** en  $a \in D$  si  $f(x) \geq f(a)$  pour tout  $x \in D$ .
- (ii) La fonction  $f$  admet un **maximum global** en  $a \in D$  si  $f(x) \leq f(a)$  pour tout  $x \in D$ .
- (iii) La fonction  $f$  admet un **minimum local** en  $a \in D$  si  $f(x) \geq f(a)$  dans un voisinage de  $a$  (c'est-à-dire s'il existe  $r > 0$  tel que  $f(x) \geq f(a)$  pour tout  $x \in B(a, r) \cap D$ ).
- (iv) La fonction  $f$  admet un **maximum local** en  $a \in D$  si  $f(x) \leq f(a)$  dans un voisinage de  $a$  (c'est-à-dire s'il existe  $r > 0$  tel que  $f(x) \leq f(a)$  pour tout  $x \in B(a, r) \cap D$ ).

Un **extremum** (local ou global) de  $f$  est un minimum ou un maximum (local ou global). Il est dit strict si l'inégalité est stricte pour  $x \neq a$  (c'est-à-dire  $f(x) > f(a)$  pour un minimum strict et  $f(x) < f(a)$  pour un maximum strict).

### Proposition 2 (*Extremum d'une fonction dérivable*)

Soit  $I$  un intervalle **ouvert** et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Si la fonction  $f$  admet un extremum local en  $c \in I$ , alors  $f'(c) = 0$ .

### Définition 3

On dit qu'une application  $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable admet un **point critique** en  $a \in U$  si  $df(a)$  est l'application nulle de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , notée  $0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$ .

### Proposition 4

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,  $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable et  $a \in U$ . On a équivalence entre :

- (i).  $a$  est un point critique de  $f$ ,
  - (ii).  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \partial_i f(a) = 0$ ,
  - (iii). la Jacobienne de  $f$  en  $a$  est la matrice nulle
- en calculant les dérivées partielles et la Jacobienne de  $f$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ .

### Proposition 5 (*Condition nécessaire d'extremum sur un ouvert*)

Soit  $U$  un **ouvert** de  $E$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable. Si  $f$  admet un extremum local en  $a \in U$ , alors  $a$  est un point critique de  $f$ .

### Définition 6

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application. La **matrice hessienne** de  $f$  au point  $a \in U$  est, si elle est définie, la matrice des dérivées partielles secondes de  $f$  en  $a$  :

$$\begin{aligned}
 H_f(a) &= \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

---

**Théorème 7 (Taylor-Young à l'ordre 2)**

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  et  $a \in U$ . Alors il existe une fonction  $\varepsilon$ , définie sur un voisinage de  $0_{\mathbb{R}^n}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , vérifiant :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(h) = 0.$$

**Proposition 8 (Condition suffisante d'extremum sur un ouvert)**

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  et  $a \in U$  un point critique de  $f$ .

- (i) Si toutes les valeurs propres de  $H_f(a)$  sont strictement positives, alors  $f$  admet un minimum local strict en  $a$ .
- (ii) Si toutes les valeurs propres de  $H_f(a)$  sont strictement négatives, alors  $f$  admet un maximum local strict en  $a$ .
- (iii) Si  $H_f(a)$  admet au moins une valeur propre strictement positive et une strictement négative, alors  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $a$ . On dit que  $a$  est un **point col**, ou **point selle**.

**Corollaire 9**

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  et  $a$  un point critique de  $f$ .

- (i) Si  $\det(H_f(a)) > 0$  et  $\text{Tr}(H_f(a)) > 0$ , alors  $f$  admet un minimum local strict en  $a$ .
- (ii) Si  $\det(H_f(a)) > 0$  et  $\text{Tr}(H_f(a)) < 0$ , alors  $f$  admet un maximum local strict en  $a$ .
- (iii) Si  $\det(H_f(a)) < 0$ , alors  $f$  n'admet pas d'extremum en  $a$ .

**Définition 10**

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  et  $S$  la surface d'équation  $z = f(x, y)$ . Si  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  est un point de  $S$ , alors une équation du plan tangent à  $S$  en  $M_0$  est :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

**Proposition 11 (Position d'une surface et de son plan tangent)**

Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  et  $S$  la surface d'équation  $z = f(x, y)$ . Soit  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  un point de  $S$  et  $P$  le plan tangent à la surface  $S$  au point  $M_0$ .

- (i) Si les deux valeurs propres de  $H_f(x_0, y_0)$  sont strictement positives, alors la surface  $S$  est au-dessus de son plan tangent  $P$  au voisinage de  $M_0$ .
- (ii) Si les deux valeurs propres de  $H_f(x_0, y_0)$  sont strictement négatives, alors la surface  $S$  est au-dessous de son plan tangent  $P$  au voisinage de  $M_0$ .
- (iii) Si  $H_f(x_0, y_0)$  admet une valeur propre strictement positive et une strictement négative, alors la surface  $S$  traverse son plan tangent.

**Théorème 12 (Théorème des bornes atteintes)**

Soit  $K$  un compact non vide de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors  $f$  admet un minimum global et un maximum global sur  $K$ .