Définition 1

On appelle **pavé** *de* $\mathbb{R}^2$ *toute partie* P *de* $\mathbb{R}^2$ *de la forme* $P = [a;b] \times [c;d]$ *avec* $a < b$ *et* $c < d$. *En d'autres termes, un pavé de* $\mathbb{R}^2$ *est un produit de deux segments de* $\mathbb{R}$.

Théorème 2 (*Fubini*)

Soit $f : [a;b] \times [c;d] \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction continue sur le pavé* $[a;b] \times [c;d]$, *alors les fonctions*

$$x \longmapsto \int_{y=c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad y \longmapsto \int_{x=a}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

sont continues et on a

$$\int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Définition 3

La valeur commune de ces deux intégrales est appelée **intégrale double** *de* f *sur le pavé* $P = [a;b] \times [c;d]$ *et est notée*

$$\iint_P f \quad \text{ou} \quad \iint_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Corollaire 4

Soit $f : [a;b] \times [c;d] \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction à variables séparées, c'est-à-dire qu'il existe* $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *et* $h : [c;d] \longrightarrow \mathbb{C}$ *telles que*

$$\forall (x,y) \in [a;b] \times [c;d], \quad f(x,y) = g(x)h(y)$$

On suppose que g *et* h *sont continues sur* $[a;b]$ *et* $[c;d]$ *respectivement, alors*

$$\iint_{[a;b]\times[c;d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \right) \left(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y \right).$$

Théorème 5 (*Extension aux fonctions continues par morceaux*)

Soit $f : [a;b] \times [c;d] \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction* **bornée**. *On suppose que*

(*i*). *pour tout* $x \in [a;b]$, *la fonction* $y \longmapsto f(x,y)$ *est continue par morceaux,*
(*ii*). *pour tout* $y \in [c;d]$, *la fonction* $x \longmapsto f(x,y)$ *est continue par morceaux,*
(*iii*). *la fonction* $x \longmapsto \displaystyle\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ *est continue par morceaux sur* $[a;b]$,
(*iv*). *la fonction* $y \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ *est continue par morceaux sur* $[c;d]$,

alors on a l'égalité

$$\int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Cette valeur commune est encore appelée l'intégrale double de f *sur* $[a;b]\times[c;d]$ *et notée* $\displaystyle\iint_{[a;b]\times[c;d]} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Définition 6

*Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite **x-élémentaire** s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\varphi_1, \varphi_2 : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant*

$$\forall x \in]a;b[, \quad \varphi_1(x) < \varphi_2(x)$$

tels que l'on puisse écrire

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Définition 7

*Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite **y-élémentaire** s'il existe $c, d \in \mathbb{R}$ avec $c < d$ et $\psi_1, \psi_2 : [c;d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant*

$$\forall y \in]c;d[, \quad \psi_1(y) < \psi_2(y)$$

tels que l'on puisse écrire

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$

Définition 8

*Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite **élémentaire** si elle est à la fois x-élémentaire et y-élémentaire.*

Théorème 9

Soient $A \subset \mathbb{R}^2$ une partie élémentaire et $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, alors si l'on note $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$, on a

$$\int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Cette valeur commune est appelée intégrale double de f sur A et est encore notée $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Définition 10

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. On appelle intérieur de A, noté A°, l'ensemble

$$A^\circ = \{a \in A \mid \exists r > 0,\ B(a,r) \subset A\}.$$

Définition 11

*Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite **simple** si elle est réunion d'une famille finie non vide de parties élémentaires d'intérieurs deux à deux disjoints, i.e. s'il existe $A_1, \ldots, A_n$ parties élémentaires de $\mathbb{R}^2$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) vérifiant*

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{et} \quad \forall i,j \in [\![1;n]\!], \quad i \neq j \Rightarrow A_i^\circ \cap A_j^\circ = \emptyset.$$

Définition 12

Soit A est une partie simple de $\mathbb{R}^2$, avec $A = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ où les A_i sont des parties élémentaires. Si

$f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue, on appelle intégrale double de f sur A le scalaire

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n} \iint_{A_i} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Proposition 13

Soit A une partie simple. Pour toutes fonctions $f, g : A \longrightarrow \mathbb{C}$ continues, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

(*i*). $\displaystyle\iint_A \lambda f(x,y) + \mu g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lambda \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mu \iint_A g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

(*ii*). *si f est à valeurs positives, alors* $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq 0$,

(*iii*). *si f est à valeurs positives et* $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$*, alors f est nulle sur A,*

(*iv*). $\displaystyle\left|\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leq \iint_A |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Proposition 14

Soient A, B deux parties simples de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \cup B \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. Si $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$, alors

$$\iint_{A\cup B} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Théorème 15 (*admis*)

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \longrightarrow V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. Soit $A \subset U$. Si A et $\varphi(A)$ sont des parties simples de $\mathbb{R}^2$, alors pour toute fonction $f : \varphi(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, on a

$$\iint_{\varphi(A)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_A f(\varphi(u,v))\,|\det(J_\varphi(u,v))|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

où $J_\varphi(u,v)$ désigne la matrice Jacobienne de φ au point (u,v) et $\det(J_\varphi(u,v))$ le Jacobien de φ en (x,y).

Définition 16

*Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite **θ-élémentaire** s'il existe $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ avec $\theta_1 < \theta_2 \leq \theta_1 + 2\pi$ et $r_1, r_2 : [\theta_1; \theta_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant*

$$\forall \theta \in]\theta_1; \theta_2[, \quad 0 \leq r_1(\theta) < r_2(\theta)$$

tels que l'on puisse écrire

$$A = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,\ r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\}.$$

Théorème 17

Soit A une partie simple et θ-élémentaire. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue, alors

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2} \left(\int_{r=r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r \right) d\theta.$$

Définition 18

Soit A une partie de $\mathbb{R}^3$. On suppose que l'on peut écrire

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b \text{ et } (x, y) \in D_z\}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ et pour tout $z \in [a; b]$, D_z est une partie simple de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, alors on définit l'intégrale triple sur A comme

$$\iiint_A f(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{z=a}^{z=b} \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z.$$

Proposition 19

Soient A une partie de $\mathbb{R}^3$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. On suppose que l'on peut écrire

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \text{ et } \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

où D est une partie simple de $\mathbb{R}^2$ et α et β sont deux fonctions continues sur D. Alors l'intégrale triple de f sur A est

$$\iiint_A f(x, y, z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Définition 20

Soit A une partie de $\mathbb{R}^3$. On suppose que A peut s'écrire au moins d'une des façons ci-dessus, alors le volume de A est donné par $\displaystyle\iiint_A 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$.