Définition 1

Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $\mathcal{B}$ une base de E.
La fonction f est appelée dérivée partielle d'ordre 0 de f.
Pour $k \in \mathbb{N}$, et sous réserve d'existence, on appelle dérivées partielles d'ordre $k+1$ de f les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre k de f (dans la base $\mathcal{B}$).

Définition 2

Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction $f : U \subset E \longrightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (sur U) si ses dérivées partielles d'ordre k dans une base de E existent et sont continues (sur U).
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 3

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si $f : U \subset E \longrightarrow F$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U, alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Lemme 4

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $f : U \subset E \longrightarrow F$. On a équivalence entre :

(i). *f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U,*

(ii). *les dérivées partielles premières de f existent et sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.*

Proposition 5

Soient $f : U \subset E \longrightarrow F$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F. On a équivalence entre :

(i). *f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U,*

(ii). *les fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_p$ de f dans $\mathcal{B}'$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.*

Proposition 6

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $f, g : U \subset E \longrightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Proposition 7

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $\alpha : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur U. Alors le produit αf est aussi de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Théorème 8 (*Composition*)

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : U \subset E \longrightarrow F$ et $g : V \subset F \longrightarrow G$ avec U, V deux ouverts tels que $f(U) \subset V$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. sur U et V), alors la composée $g \circ f$ est elle-aussi de classe $\mathcal{C}^k$ (sur U).

Théorème 9 (*Théorème de Schwarz(admis)*)

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$,

$$\partial_i(\partial_j f) = \partial_j(\partial_i f)$$

où les dérivées partielles de f sont calculées relativement à une base $\mathcal{B}$ de E.

Corollaire 10

Soit $f : U \subset E \longrightarrow F$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U. Pour tous $i_1, \dots, i_k \in [\![1; n]\!]$, pour toute permutation $\sigma \in S_k$

(groupe des permutations de $[\![1;k]\!]$), on a

$$\partial_{i_{\sigma(1)}}(\partial_{i_{\sigma(2)}}(\cdots(\partial_{i_{\sigma(k)}}f)\cdots)) = \partial_{i_1}(\cdots(\partial_{i_k}f)\cdots)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}}\cdots\partial x_{i_{\sigma(k)}}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}.$$

où les dérivées partielles de f sont calculées relativement à une base $\mathcal{B}$ de E.

Définition 11

Soit D une partie quelconque de E et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles.

(i) La fonction f admet un **minimum global** en $a \in D$ si $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in D$.

(ii) La fonction f admet un **maximum global** en $a \in D$ si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in D$.

(iii) La fonction f admet un **minimum local** en $a \in D$ si $f(x) \geq f(a)$ dans un voisinage de a (c'est-à-dire s'il existe $r > 0$ tel que $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in B(a,r) \cap D$).

(iv) La fonction f admet un **maximum local** en $a \in D$ si $f(x) \leq f(a)$ dans un voisinage de a (c'est-à-dire s'il existe $r > 0$ tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in B(a,r) \cap D$).

*Un **extremum** (local ou global) de f est un minimum ou un maximum (local ou global). Il est dit strict si l'inégalité est stricte pour $x \neq a$ (c'est-à-dire $f(x) > f(a)$ pour un minimum strict et $f(x) < f(a)$ pour un maximum strict).*

Proposition 12 (*Extremum d'une fonction dérivable*)

*Soit I un intervalle **ouvert** et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si la fonction f admet un extremum local en $c \in I$, alors $f'(c) = 0$.*

Définition 13

*On dit qu'une application $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable admet un **point critique** en $a \in U$ si $\mathrm{d}f(a)$ est l'application nulle de E dans $\mathbb{R}$, notée $0_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})}$.*

Proposition 14

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $f : U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable et $a \in U$. On a équivalence entre :

(i). a est un point critique de f,

(ii). $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\partial_i f(a) = 0$,

(iii). la Jacobienne de f en a est la matrice nulle

en calculant les dérivées partielles et la Jacobienne de f relativement à la base $\mathcal{B}$.

Proposition 15 (*Condition nécessaire d'extremum sur un ouvert*)

*Soit U un **ouvert** de E et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si f admet un extremum local en $a \in U$, alors a est un point critique de f.*

Définition 16

*Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. La **matrice hessienne** de f au point $a \in U$*

est, si elle est définie, la matrice des dérivées partielles secondes de f en a :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Théorème 17 (*Taylor-Young à l'ordre* 2)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et $a \in U$. Alors il existe une fonction ε, définie sur un voisinage de $0_{\mathbb{R}^n}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h\to 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(h) = 0.$$

Proposition 18 (*Condition suffisante d'extremum sur un ouvert*)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $a \in U$ un point critique de f.

(*i*) *Si toutes les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement positives, alors f admet un minimum local strict en a.*

(*ii*) *Si toutes les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement négatives, alors f admet un maximum local strict en a.*

(*iii*) *Si $H_f(a)$ admet au moins une valeur propre strictement positive et une strictement négative, alors f n'admet pas d'extremum local en a. On dit que a est un **point col**, ou **point selle**.*

Corollaire 19

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et a un point critique de f.

(*i*) *Si* $\det(H_f(a)) > 0$ et $\mathrm{Tr}(H_f(a)) > 0$, *alors f admet un minimum local strict en a.*

(*ii*) *Si* $\det(H_f(a)) > 0$ et $\mathrm{Tr}(H_f(a)) < 0$, *alors f admet un maximum local strict en a.*

(*iii*) *Si* $\det(H_f(a)) < 0$, *alors f n'admet pas d'extremum en a.*

Définition 20

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et S la surface d'équation $z = f(x, y)$. Si $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ est un point de S, alors une équation du plan tangent à S en M_0 est :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Proposition 21 (*Position d'une surface et de son plan tangent*)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et S la surface d'équation $z = f(x, y)$. Soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de S et P le plan tangent à la surface S au point M_0.

(*i*) *Si les deux valeurs propres de $H_f(x_0, y_0)$ sont strictement positives, alors la surface S est au-dessus de son plan tangent P au voisinage de M_0.*

(ii) *Si les deux valeurs propres de $H_f(x_0, y_0)$ sont strictement négatives, alors la surface S est au-dessous de son plan tangent P au voisinage de M_0.*

(iii) *Si $H_f(x_0, y_0)$ admet une valeur propre strictement positive et une strictement négative, alors la surface S traverse son plan tangent.*

Théorème 22 (*Théorème des bornes atteintes*)

Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f admet un minimum global et un maximum global sur K.