

Théorème 1 (Continuité sur un segment)

Soit $f : I \times [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors la fonction

$$F : I \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \int_a^b f(x, t) dt$$

est définie et continue sur I .

Théorème 2 (Dérivation sur un segment)

Soit $f : I \times [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que

(i). f est continue sur $I \times [a; b]$,

(ii). f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable, notée $\frac{\partial f}{\partial x}$, et que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times [a; b]$,

alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Théorème 3

Soient $f : I \times J \rightarrow \mathbb{C}$ continue et $u, v : I \rightarrow J$ continues. Alors la fonction

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt$$

est définie et continue sur I .

Théorème 4

Soient $f : I \times J \rightarrow \mathbb{C}$ continue, admettant une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $I \times J$ et $u, v : I \rightarrow J$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 . Alors la fonction

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur I , et

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + v'(x)f(x, v(x)) - u'(x)f(x, u(x)).$$

Théorème 5 (Continuité par domination)

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que :

(i). f est continue sur $I \times J$,

(ii). il existe $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J vérifiant

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t) \quad (\text{hypothèse de domination})$$

alors la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est définie et continue sur I .

Théorème 6 (Dérivabilité par domination)

Soit $f : I \times J \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que :

(i). la fonction f est continue sur $I \times J$,

(ii). il existe une fonction $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

(iii). la fonction f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ qui est continue sur $I \times J$,

(iv). il existe une fonction $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \psi(t)$$

alors la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x, t) dt$ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur I . De plus,

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$