Théorème 1 (***Continuité sur un segment***)

Soit $f : I \times [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction continue. Alors la fonction*

$$F : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est définie et continue sur I.

Théorème 2 (***Dérivation sur un segment***)

Soit $f : I \times [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$. *On suppose que*

(i). f *est continue sur* $I \times [a;b]$,

(ii). f *admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable, notée* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, *et que* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *est continue sur* $I \times [a;b]$,

alors la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est définie et de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *et*

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 3

Soient $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$ *continue et* $u, v : I \longrightarrow J$ *continues. Alors la fonction*

$$\varphi : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est définie et continue sur I.

Théorème 4

Soient $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$ *continue, admettant une dérivée partielle* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *continue sur* $I \times J$ *et* $u, v : I \longrightarrow J$ *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$. *Alors la fonction*

$$\varphi : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ *sur* I, *et*

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t + v'(x)f(x,v(x)) - u'(x)f(x,u(x)).$$

Théorème 5 (***Continuité par domination***)

Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$. *On suppose que :*

(i). f *est continue sur* $I \times J$, *(ii). il existe $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J vérifiant*

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t) \qquad \textit{(hypothèse de domination)}$$

alors la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

Corollaire 6

Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que :

(i). f est continue sur $I \times J$,

(ii). pour tout segment $[a;b]$ inclus dans I, il existe $\varphi_{a,b} : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J vérifiant

$$\forall (x,t) \in [a;b] \times J, \quad |f(x,t)| \leq \varphi_{a,b}(t) \qquad \textit{(hypothèse de domination)}$$

alors la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

Théorème 7 (*Dérivabilité par domination*)

Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que :

(i). la fonction f est continue sur $I \times J$,

(ii). il existe une fonction $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

(iii). la fonction f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, qui est continue sur $I \times J$,

(iv). il existe une fonction $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t)$$

alors la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. De plus,

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Corollaire 8

Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$. On suppose que :

(i). la fonction f est continue sur $I \times J$,

(ii). pour tout segment $[a;b]$ inclus dans I, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in [a;b] \times J, \quad |f(x,t)| \leq \varphi_{a,b}(t)$$

(iii). la fonction f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable, notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, qui est continue sur $I \times J$,

(iv). pour tout segment $[a;b]$ inclus dans I, il existe une fonction $\psi_{a,b} : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in [a;b] \times J, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \psi_{a,b}(t)$$

alors la fonction $F : x \longmapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. De plus,

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$