E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés (pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) par $\|\,.\,\|_E$ et $\|\,.\,\|_F$.

Définition 1

*Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$ et a un point adhérent à X. On dit que f **tend vers** $\ell \in F$ en a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x-a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ est alors unique, et on note $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 2 (*Caractérisation séquentielle*)

Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$, $\ell \in F$ et a un point adhérent à X. On a équivalence entre

(i). $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$,

(ii). $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 3

Soient $f, g : X \subset E \longrightarrow F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell'$, alors $(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda\ell + \mu\ell'$.

Proposition 4

Soient $\alpha : X \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \subset E \longrightarrow F$. Si $\alpha(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{K}$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, alors $(\alpha f)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda\ell$.

Proposition 5 (*Composition des limites*)

Soient G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $f : X \subset E \longrightarrow F$ et $g : Y \subset F \longrightarrow G$ avec $f(X) \subset Y$. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ et $g(y) \underset{y\to b}{\longrightarrow} \ell$, alors $g \circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Définition 6

*Les applications scalaires $f_1, \dots, f_p$ sont appelées **fonctions coordonnées (ou composantes)** de f relatives à la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.*

Proposition 7

Soit a un point adhérent à X. On a équivalence entre :

(i). f tend vers $\ell = \sum_{j=1}^{p} \ell_j e_j$ en a,

(ii). pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, f_j tend vers ℓ_j en a.

Proposition 8

Soit $a \in E$ un point adhérent à X. On a équivalence entre :

(i). f tend vers $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ en a,

(ii). pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, f_i tend vers ℓ_i en a.

Définition 9

Soit $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow F$ avec X une partie de $\mathbb{R}$ non majorée. On dit que f tend vers $\ell \in F$ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad x \geq A \Rightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. On définit de manière analogue $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell$, pour $X \subset \mathbb{R}$ non minorée.

Définition 10

Soit $f : X \subset E \longrightarrow F$ avec X une partie de E non bornée. On dit que f tend vers $\ell \in F$ lorsque $\|x\|_E \to +\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad \|x\|_E \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{\|x\|_E \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Définition 11

Soit $f : X \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ et a un point adhérent à X. On dit que f tend vers $+\infty$ en a si

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$. On définit de manière analogue $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$, $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, etc...

Définition 12

On dit que $f : X \subset E \longrightarrow F$ est **continue** *en $a \in X$ si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$, i.e. si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon.$$

Théorème 13

Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$ et $a \in X$. On a équivalence entre :

(i). f est continue en a,

(ii). $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \quad \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Définition 14

On dit que $f : X \subset E \longrightarrow F$ est **continue** *sur X si f est continue en tout point $a \in X$. On note $\mathcal{C}(X, F)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans F.*

Proposition 15

Soit $f : X \subset E \longrightarrow F$ et $U \subset X$ un ouvert de E. Si la restriction de f à U, notée $f_{|U}$, est continue sur U, alors f est continue en tout point de U.

Définition 16

Une application $f : X \subset E \longrightarrow F$ est dite **lipschitzienne** *s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\forall x, y \in X, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

Proposition 17

Les applications lipschitziennes sont continues.

Proposition 18

Soient $f, g : X \subset E \longrightarrow F$ continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur X.

Proposition 19

Soient $\alpha : X \subset E \longrightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \subset E \longrightarrow F$ continues sur X. Le produit $\alpha \cdot f$ est continu sur X.

Proposition 20

Soient $f : X \subset E \longrightarrow F$ et $g : Y \subset F \longrightarrow G$ vérifiant $f(X) \subset Y$. Si f et g sont continues, la composée $g \circ f$ est continue sur X.

Proposition 21

Si F est de dimension finie, alors $f : X \subset E \longrightarrow F$ est continue si et seulement si ses fonctions coordonnées dans une base de F le sont.

Proposition 22

Soit $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ un espace normé produit, et $f : X \subset E \longrightarrow F$. On peut noter $f = (f_1, \ldots, f_p)$ avec $f_i : X \subset E \longrightarrow F_i$ pour tout $i \in [\![1; p]\!]$. La fonction f est continue sur X si et seulement si ses composantes f_i le sont.

Théorème 23

Soit $f : E \longrightarrow F$. On a équivalence entre :

- (i). *f est continue sur E,*
- (ii). *l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de F,*
- (iii). *l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.*

Théorème 24

Soient $K \subset E$ un compact et $f : K \longrightarrow F$ une application continue. Alors $f(K)$ est un compact de F.
En d'autres termes, l'image d'une partie compacte par une application continue est une partie compacte.

Corollaire 25

Soit $f : K \subset E \longrightarrow F$. Si K est une partie compacte de E et f continue, alors f est bornée.

Théorème 26 (*Théorème des bornes atteintes*)

Soit $f : K \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ continue où K est un compact non vide de E. Alors f est bornée et atteint ses bornes (elle admet un minimum et un maximum).

Théorème 27

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i). *u est continue,*
- (ii). *u est continue en 0_E,*
- (iii). $\exists k \geq 0, \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$,
- (iv). *u est bornée sur la boule unité fermée,*
- (v). *u est bornée sur la sphère unité,*
- (vi). *u est lipschitzienne,*

Définition 28

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ continue. On définit la norme subordonnée aux normes $\| \,.\, \|_E$ et $\| \,.\, \|_F$ de u par l'une *des trois caractérisations équivalentes :*

$$\begin{aligned}
|||u||| &= \sup\{\|u(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E \leq 1\} \\
&= \sup\{\|u(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E = 1\} \\
&= \sup\left\{\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E, x \neq 0_E\right\}.
\end{aligned}$$

Proposition 29

La norme subordonnée définit une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E,F) = \{u \in \mathcal{L}(E,F) \mid u$ continue $\}$.

Théorème 30

Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.