Définition 1

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est ***scalaire*** *si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si $p = 1$. On dit que f est à* ***valeurs vectorielles*** *sinon.*

Définition 2

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$. Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, l'application $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée ***i-ème fonction composante*** *(ou* ***i-ème fonction coordonnée****) de f.*

Définition 3

*Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$. Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, on définit l'****application partielle*** *$f_{a,j}$ par*

$$f_{a,j} : \begin{array}{ccc} U_{a,j} \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \end{array}$$

où $U_{a,j} = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in U\}$ (la notation est abusive dans les cas $j = 1$ et $j = n$ pour lesquels il faut remplacer les expressions ci-dessus par $(t, a_2, \ldots, a_n)$ et $(a_1, \ldots, a_{n-1}, t)$ respectivement).

Définition 4

Soit I un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est ***dérivable*** *en a si le taux d'acroissement*

$$\frac{1}{t}(f(a+t) - f(a))$$

converge lorsque $t \to 0$ (avec $t \neq 0$). Sa limite est alors appelée ***vecteur dérivé*** *de f en a et noté $f'(a)$.*

Définition 5

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite dérivable si elle l'est en tout point de l'ouvert non vide I. On peut alors introduire l'application $f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & f'(t) \end{array}$ appelée fonction dérivée de f.

Théorème 6

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_p$. On a équivalence entre :

(i). f est dérivable,

(ii). les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ sont dérivables.

De plus, si tel est le cas, on a

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_p'(t)).$$

Définition 7

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $j \in [\![1;n]\!]$. On dit que f admet une ***dérivée partielle*** *par rapport à sa j-ième variable au point a (encore appelée j-ième dérivée partielle en a) si l'application partielle $f_{a,j}$ est dérivable au point a_j.*

On note alors $\partial_j f(a)$ *ou* $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ *cette dérivée, c'est-à-dire*

$$\begin{aligned}\partial_j f(a) &= f'_{a,j}(a_j)\\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+t,a_{j+1},\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_n)}{t}.\end{aligned}$$

Définition 8

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *admet une dérivée partielle par rapport à sa* j*-ième variable en tout point* $a \in U$, *l'application* $\partial_j f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *est appelée* j*-ième dérivée partielle de* f.

Proposition 9

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $f_1,\dots,f_p : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *ses applications coordonnées. On a équivalence entre :*

(i). f *admet des dérivées partielles,*

(ii). *les fonctions coordonnées de* f *admettent des dérivées partielles.*

De plus, on a alors $(\partial_i f)_k = \partial_i(f_k)$ *où l'on a noté* f_k *et* $(\partial_i f)_k$ *les fonctions coordonnées de* f *et* $\partial_i f$.

Définition 10

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *et* $a \in U$. *Si* f *admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables au point* a, *on définit la matrice* ***Jacobienne*** *de* f *au point* a, *notée* $J_f(a)$, *comme la matrice à* p *lignes et* n *colonnes dont les coefficients sont*

$$(J_f(a))_{i,j} = \partial_j f_i(a) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \quad \forall i \in [\![1;p]\!], \forall j \in [\![1;n]\!].$$

On remarque que $J_f(a) \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Définition 11

Toujours sous réserve d'existence des dérivées partielles de f, *soit* $a \in U$ *:*

- *si* f *est scalaire (i.e* $p = 1$*), on définit le* ***gradient*** *de* f *au point* a, *noté* $\mathrm{grad} f(a)$ *ou* $\nabla f(a)$, *par*

$$\mathrm{grad} f(a) = \begin{pmatrix}\partial_1 f(a)\\ \vdots \\ \partial_n f(a)\end{pmatrix} = {}^t J_f(a)$$

- *si* $n = p$ *(i.e.* $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$*), on définit la* ***divergence*** *de* f *au point* a *par*

$$\mathrm{div} f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i(a) = (J_f(a))$$

- *si* $n = p = 3$, *on définit le* ***rotationnel*** *de* f *au point* a *par*

$$\mathrm{rot} f(a) = \begin{pmatrix}\partial_2 f_3(a) - \partial_3 f_2(a)\\ \partial_3 f_1(a) - \partial_1 f_3(a)\\ \partial_1 f_2(a) - \partial_2 f_1(a)\end{pmatrix}$$

Définition 12

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in U$ *et* $v \in \mathbb{R}^n$. *On dit que* f *est* ***dérivable selon le vecteur*** v *en* a *(ou*

admet une dérivée directionnelle suivant v en a) si la fonction d'une variable réelle $\varphi : t \longmapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0.
On appelle alors dérivée selon le vecteur v de f en a la valeur de cette dérivée, notée

$$D_v f(a) = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a)).$$

Proposition 13

Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $a \in U$. Soit $j \in [\![1; n]\!]$. La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à sa j-ième variable en a si et seulement si elle admet une dérivée directionnelle selon le vecteur e_j en a.
Si c'est le cas, on a alors

$$\partial_j f(a) = D_{e_j} f(a).$$

Définition 14

*Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite **différentiable** en $a \in U$ s'il existe une application linéaire $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que*

$$\lim_{h \overset{\neq}{\to} 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|f(a+h) - f(a) - u(h)\|}{\|h\|} = 0 \qquad (*)$$

Proposition 15

Si f est différentiable en a, l'application linéaire u est unique. On la note $\mathrm{d}f(a)$, appelée différentielle de f en a. Par définition, $\mathrm{d}f(a)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Théorème 16

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Si f est différentiable en $a \in U$, alors f est continue en a.

Définition 17

*Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est **différentiable** (sur U) si f est différentiable en tout point de U. L'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f : & U & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ & a & \longmapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$$

est alors appelée différentielle de f.

Proposition 18

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est constante, alors f est différentiable et sa différentielle est l'application nulle : pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(a) = \widetilde{0}$.

Proposition 19

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est linéaire, alors f est différentiable et sa différentielle est constante :

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}f(a) = f.$$

Proposition 20

Si $\varphi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est une application bilinéaire, alors φ est différentiable, et on a

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m, \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m, \quad \mathrm{d}\varphi(x,y)(h,k) = \varphi(x,k) + \varphi(h,y).$$

Proposition 21

Soient I un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On a équivalence entre :

(i). *f est différentiable en a,*

(ii). *f est dérivable en a.*

Dans ce cas, on a alors

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{d}f(a)(h) = hf'(a) \quad \text{et} \quad f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1)$$

où l'on rappelle que $f'(a) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a+t) - f(a))$.

Théorème 22

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f est dérivable en a selon tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ et on a

$$D_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v).$$

Théorème 23

Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable, alors f admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables, et pour tout $a \in U$, on a

$$\partial_i f(a) = \mathrm{d}f(a)(e_i) \quad \forall i \in [\![1;n]\!].$$

De plus, pour tout $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Proposition 24

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, la matrice Jacobienne de f en a est la matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ respectivement.

Proposition 25

Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si f et g sont différentiables, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi et

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda\, \mathrm{d}f + \mu\, \mathrm{d}g.$$

Proposition 26

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_p$. On a équivalence entre :

(i). *f est différentiable,*

(ii). *les fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_p$ de f sont différentiables.*

Dans ce cas, on a

$$\forall a \in U, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}f(a)(h) = (\mathrm{d}f_1(a)(h), \ldots, \mathrm{d}f_p(a)(h)).$$

Théorème 27 (*Différentiation de fonctions composées*)

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, V *un ouvert de* $\mathbb{R}^p$ *tel que* $f(U) \subset V$ *et* $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$. *Si* f *est différentiable en* $a \in U$ *et* g *différentiable en* $f(a) \in V$, *la fonction composée* $g \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *est différentiable en* a *et*

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}(g \circ f)(a)(h) = \mathrm{d}g(f(a))\Big(\mathrm{d}f(a)(h)\Big).$$

Par suite, si f *et* g *sont différentiables,* $g \circ f$ *est aussi différentiable et*

$$\forall a \in U, \quad \mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(f(a)) \circ \mathrm{d}f(a).$$

Corollaire 28 (*Version matricielle*)

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *telles que* $f(U) \subset V$ *et* $a \in U$. *Si* f *est différentiable en* a, g *différentiable en* $f(a)$, *alors on a*

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a).$$

Corollaire 29 (*Formule de dérivation en chaîne*)

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *telles que* $f(U) \subset V$ *et* $a \in U$. *Si* f *est différentiable en* a *et* g *différentiable en* $f(a)$, *alors les dérivées partielles de* $g \circ f$ *en* a *sont données par*

$$\partial_i (g \circ f)(a) = \sum_{k=1}^{p} \partial_i f_k(a) \partial_k g(f(a)) \quad \forall i \in [\![1; n]\!]$$

où l'on a noté $f_1, \ldots, f_p$ *les fonctions coordonnées de* f.

Proposition 30

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\lambda : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction scalaire et* $a \in U$. *Si* f *et* λ *sont différentiables en* a, *il en est de même de la fonction* λf *et on a*

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{d}(\lambda f)(a)(h) = \lambda(a)\,\mathrm{d}f(a)(h) + \mathrm{d}\lambda(a)(h) f(a) \quad \textit{i.e.} \quad \mathrm{d}(\lambda f)(a) = \mathrm{d}\lambda(a) f(a) + \lambda(a)\,\mathrm{d}f(a).$$

Définition 31

Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *est dite* **de classe $\mathcal{C}^1$** *ou* **continûment différentiable** *si elle est différentiable et si sa différentielle* $\mathrm{d}f : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ *est continue.*

Théorème 32

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *où* U *est un ouvert de* $\mathbb{R}^p$. *On a équivalence entre :*

(i). f *est de classe* $\mathcal{C}^1$,

(ii). *pour tout* $i \in [\![1; n]\!]$, *la dérivée partielle de* f *par rapport à sa* i*-ème variable* $\partial_i f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *existe et est continue.*