

Dans toute la suite,  $(E, \|\cdot\|)$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

### Définition 1

On appelle **voisinage** d'un élément  $x \in E$  toute partie  $V \subset E$  vérifiant :

$$\exists r > 0, \quad B(x, r) \subset V.$$

### Définition 2

Une partie  $\mathcal{U}$  de  $E$  est dite **ouverte** si elle est voisinage de chacun de ses points, i.e.

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0, \quad B(x, r) \subset \mathcal{U}.$$

On dit encore que  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $E$ .

### Proposition 3

Une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

### Proposition 4

Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.

### Proposition 5

Si  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_p$  sont des ouverts des espaces normés  $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$  alors  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_p$  est un ouvert de l'espace normé produit  $E = E_1 \times \dots \times E_p$  muni de la norme produit.

### Définition 6

Une partie  $F$  de  $E$  est dite **fermée** si son complémentaire (dans  $E$ ) est un ouvert. On dit aussi que  $F$  est un fermé de  $E$ .

### Proposition 7

Une intersection (finie ou infinie) de fermés de  $E$  est un fermé de  $E$ .

### Proposition 8

Une union **finie** de fermés de  $E$  est un fermé de  $E$ .

### Proposition 9 (Caractérisation séquentielle des fermés)

Une partie  $F$  de  $E$  est fermée si et seulement si, pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$  d'éléments de  $F$  qui converge, la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  appartient à  $F$ , ce qui s'écrit encore :

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \quad \Rightarrow \quad \ell \in F.$$

### Proposition 10

Si  $F_1, \dots, F_p$  sont des fermés des espaces normés  $E_1, \dots, E_p$  alors  $F = F_1 \times \dots \times F_p$  est une partie fermée de l'espace vectoriel normé produit  $E = E_1 \times \dots \times E_p$  pour la norme produit.

### Définition 11

Un élément  $a \in E$  est dit **intérieur** à une partie  $X \subset E$  si  $X$  est un voisinage de  $a$ , i.e.

$$\exists r > 0, \quad B(a, r) \subset X.$$

L'intérieur de  $X$ , noté  $\overset{\circ}{X}$ , est l'ensemble de tous les points intérieurs à  $X$ , c'est-à-dire  $\overset{\circ}{X} = \{x \in E \mid \exists r > 0, B(x, r) \subset X\}$ .

**Proposition 12**

Une partie  $X \subset E$  est ouverte si et seulement si  $\overset{\circ}{X} = X$ .

**Proposition 13**

Soit  $X$  une partie de  $E$ , alors  $\overset{\circ}{X}$  est la réunion de tous les ouverts inclus dans  $X$ . Par conséquent,  $\overset{\circ}{X}$  est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans  $X$ .

**Définition 14**

On dit qu'un élément  $a \in E$  est **adhérent** à une partie  $X \subset E$  si

$$\forall r > 0, B(a, r) \cap X \neq \emptyset.$$

On appelle **adhérence** de  $X$  l'ensemble, noté  $\overline{X}$ , des éléments adhérents à  $X$ .

**Proposition 15**

Soit  $X$  une partie de  $E$ , alors

$$E \setminus \overline{X} = (E \setminus \overset{\circ}{X}) \quad \text{et} \quad E \setminus \overset{\circ}{X} = \overline{E \setminus X}.$$

**Proposition 16**

Une partie  $X \subset E$  est fermée si et seulement si  $\overline{X} = X$ .

**Proposition 17**

Soit  $X$  une partie de  $E$ , alors  $\overline{X}$  est l'intersection de tous les fermés contenant  $X$ . Par conséquent,  $\overline{X}$  est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant  $X$ .

**Proposition 18 (Caractérisation séquentielle des points adhérents)**

Soient  $X$  une partie de  $E$  et  $a \in E$ . On a équivalence entre :

- (i).  $a$  est adhérent à  $X$ ,
- (ii). il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $X$  qui converge vers  $a$ .

**Définition 19**

On appelle **frontière** d'une partie  $X$  de  $E$  l'ensemble  $\text{Fr}(X) = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X}$ .

**Définition 20**

Une partie  $X$  de  $E$  est dite **dense** si  $\overline{X} = E$ .

**Proposition 21**

Soit  $X$  une partie de  $E$ . On a équivalence entre :

- (i).  $X$  est une partie dense de  $E$ ,
- (ii).  $\forall a \in E, \forall r > 0, B(a, r) \cap X \neq \emptyset$ ,
- (iii).  $\forall a \in E, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ .

**Définition 22**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . On appelle **suite extraite** (ou sous-suite) de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  toute suite de la forme  $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une application strictement croissante.

**Théorème 23**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . Si  $(u_n)_n$  converge vers  $\ell \in E$ , alors toute suite extraite de  $(u_n)_n$  converge aussi vers  $\ell$ .

**Définition 24**

Une partie  $K$  de  $E$  est dite **compacte** si toute suite d'éléments de  $K$  possède une sous-suite convergente dans  $K$ , i.e.

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}, \quad \exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante, } \quad x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in K.$$

On dit aussi que  $K$  est un compact de  $E$ .

**Proposition 25**

Toute partie compacte est fermée et bornée.

**Théorème 26**

Si  $E$  est un espace de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.

**Corollaire 27 (Généralisation du théorème de Bolzano-Weierstrass)**

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée admet une sous-suite convergente.