

E et F désignent des \mathbb{K} -espaces vectoriels normés (pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) par $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, X désigne une partie de E .

Définition 1

Soient X une partie de E et $a \in E$. On dit que a est un **point adhérent** à X s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers a .

Définition 2

Soient $f : X \subset E \rightarrow F$ et a un point adhérent à X . On dit que f **tend vers** $\ell \in F$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ est alors unique, et on note $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Théorème 3 (Caractérisation séquentielle)

Soient $f : X \subset E \rightarrow F$, $\ell \in F$ et a un point adhérent à X . On a équivalence entre

- (i). $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$,
- (ii). $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Proposition 4

Soient $f, g : X \subset E \rightarrow F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$, alors $(\lambda f + \mu g)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \ell + \mu \ell'$.

Proposition 5

Soient $\alpha : X \subset E \rightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \subset E \rightarrow F$. Si $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \in \mathbb{K}$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, alors $(\alpha f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \ell$.

Proposition 6 (Composition des limites)

Soient G un \mathbb{K} -espace vectoriel normé, $f : X \subset E \rightarrow F$ et $g : Y \subset F \rightarrow G$ avec $f(X) \subset Y$. Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ et $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \ell$, alors $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Proposition 7

Soit $a \in E$ un point adhérent à X . On a équivalence entre :

- (i). f tend vers $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ en a ,
- (ii). pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, f_i tend vers ℓ_i en a .

Définition 8

Soit $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ avec X une partie de \mathbb{R} non majorée. On dit que f tend vers $\ell \in F$ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x \in X, x \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. On définit de manière analogue $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$, pour $X \subset \mathbb{R}$ non minorée.

Définition 9

Soit $f : X \subset E \rightarrow F$ avec X une partie de E non bornée. On dit que f tend vers $\ell \in F$ lorsque $\|x\|_E \rightarrow +\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x \in X, \|x\|_E \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow{\|x\|_E \rightarrow +\infty} \ell$.

Définition 10

Soit $f : X \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point adhérent à X . On dit que f tend vers $+\infty$ en a si

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$. On définit de manière analogue $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$, $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$, etc...

Définition 11

On dit que $f : X \subset E \rightarrow F$ est **continue** en $a \in X$ si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$, i.e. si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon.$$

Théorème 12

Soient $f : X \subset E \rightarrow F$ et $a \in X$. On a équivalence entre :

- (i). f est continue en a ,
- (ii). $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$.

Définition 13

On dit que $f : X \subset E \rightarrow F$ est **continue** sur X si f est continue en tout point $a \in X$. On note $\mathcal{C}(X, F)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans F .

Proposition 14

Soit $f : X \subset E \rightarrow F$ et $U \subset X$ un ouvert de E . Si la restriction de f à U , notée $f|_U$, est continue sur U , alors f est continue en tout point de U .

Définition 15

Une application $f : X \subset E \rightarrow F$ est dite **lipschitzienne** s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x, y \in X, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

Proposition 16

Les applications lipschitziennes sont continues.

Proposition 17

Soient $f, g : X \subset E \rightarrow F$ continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur X .

Proposition 18

Soient $\alpha : X \subset E \rightarrow \mathbb{K}$ et $f : X \subset E \rightarrow F$ continues sur X . Le produit $\alpha \cdot f$ est continu sur X .

Proposition 19

Soient $f : X \subset E \rightarrow F$ et $g : Y \subset F \rightarrow G$ vérifiant $f(X) \subset Y$. Si f et g sont continues, la composée $g \circ f$ est continue sur X .

Proposition 20

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a = (a_1, \dots, a_d) \in D$. Pour tout $j \in \llbracket 2; d-1 \rrbracket$, on définit les applications partielles

$$f_{a,j} : D_{a,j} \rightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{où } D_{a,j} = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_d) \in D\}$$

$$t \mapsto f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_d)$$

et, en notant $D_{a,1} = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, a_2, \dots, a_d) \in D\}$ et $D_{a,d} = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{d-1}, t) \in D\}$,

$$f_{a,1} : D_{a,1} \rightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{et } f_{a,d} : D_{a,d} \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$t \mapsto f(t, a_2, \dots, a_d) \quad t \mapsto f(a_1, \dots, a_{d-1}, t)$$

Si f est continue en $a \in D$, alors l'application partielle $f_{a,j}$ est continue en a_j , pour tout $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$.

Proposition 21

Si F est de dimension finie, alors $f : X \subset E \rightarrow F$ est continue si et seulement si ses fonctions coordonnées dans une base de F le sont.

Proposition 22

Soit $F = F_1 \times \dots \times F_p$ un espace normé produit, et $f : X \subset E \rightarrow F$. On peut noter $f = (f_1, \dots, f_p)$ avec $f_i : X \subset E \rightarrow F_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$. La fonction f est continue sur X si et seulement si ses composantes f_i le sont.

Théorème 23

Soient $K \subset E$ un compact et $f : K \rightarrow F$ une application continue. Alors $f(K)$ est un compact de F .

En d'autres termes, l'image d'une partie compacte par une application continue est une partie compacte.

Corollaire 24

Soit $f : K \subset E \rightarrow F$. Si K est une partie compacte de E et f continue, alors f est bornée.

Théorème 25 (Théorème des bornes atteintes)

Soit $f : K \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ continue où K est un compact non vide de E . Alors f est bornée et atteint ses bornes (elle admet un minimum et un maximum).

Théorème 26

Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i). u est continue,
- (ii). u est continue en 0_E ,
- (iii). $\exists k \geq 0, \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$,
- (iv). u est bornée sur la boule unité fermée,
- (v). u est bornée sur la sphère unité,
- (vi). u est lipschitzienne,

Définition 27

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ continue. On définit la norme subordonnée aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ de u par l'une

des trois caractérisations équivalentes :

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sup\{\|u(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E \leq 1\} \\ &= \sup\{\|u(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in E, x \neq 0_E\right\}.\end{aligned}$$

Proposition 28

La norme subordonnée définit une norme sur le \mathbb{K} -espace vectoriel $\{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid u \text{ continue}\}$.

Théorème 29

Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

Théorème 30

Soit $\varphi : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i). φ est continue,
- (ii). φ est continue en $(0_E, 0_F)$,
- (iii). $\exists k \geq 0, \forall (x, y) \in E \times F, \|\varphi(x, y)\|_G \leq k\|x\|_E\|y\|_F$.

Corollaire 31

Si E et F sont de dimensions finies, toute application bilinéaire au départ de $E \times F$ est continue.