

Définition 1

On appelle **série entière** définie par la suite de coefficients complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la série des fonctions $u_n : z \in \mathbb{C} \mapsto a_n z^n$. Par abus de notation, cette série de fonctions $\sum u_n$ est notée $\sum a_n z^n$.

L'ensemble \mathcal{D} des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série numérique $\sum a_n z^n$ converge est appelé **domaine de convergence** de la série entière et la fonction $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est appelée somme de cette série entière.

Lemme 2 (Lemme d'Abel)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Définition 3

On appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ le nombre :

$$R = \sup \{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \text{la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

avec la convention : si $A \subset \mathbb{R}$ est une partie de \mathbb{R} (non vide) non majorée, $\sup A = +\infty$.

Proposition 4

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut

$$R = \sup \{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \text{la suite } (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 0 \}.$$

Proposition 5

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.

(i) Si $|z| < R$, alors la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge absolument.

(ii) Si $|z| > R$, alors la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ diverge grossièrement ; plus précisément, la suite $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Corollaire 6

Soit D le domaine de convergence d'une série entière de rayon de convergence R .

- Si $R = 0$, alors $D = \{0\}$.
- Si $R = +\infty$, alors $D = \mathbb{C}$.
- Si $R \in]0; +\infty[$, alors $D(0, R) \subset D \subset \overline{D(0, R)}$, où l'on a noté $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ le disque ouvert de centre O et de rayon R .

Il n'y a pas de résultat général sur la convergence des séries entières sur le cercle de centre O et de rayon R .

Définition 7

Le disque $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé **disque ouvert de convergence** de la série entière

$$\sum a_n z^n.$$

Proposition 8 (Règle de d'Alembert pour les séries entières)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, **non nuls** à partir d'un certain rang n_0 . Si la suite $\left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)_{n \geq n_0}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ vaut $R = \frac{1}{\ell}$ avec les conventions $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$.

Proposition 9 (Règle de Cauchy)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Si la suite $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$ (avec les conventions $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$).

Définition 10

On appelle **somme** des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

Théorème 11 (Somme de deux séries entières)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b . Alors le rayon de convergence R de la série entière somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Proposition 12

Si les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont des rayons de convergence respectifs R_a et R_b vérifiant $R_a \neq R_b$, alors le rayon de convergence de la série entière somme $\sum (a_n + b_n) z^n$ est égal à $\min(R_a, R_b)$.

Définition 13

On appelle **produit des séries entières** $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Théorème 14 (Produit de deux séries entières)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b . Alors

le rayon de convergence R de la série entière produit $\sum c_n z^n$ vérifie

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Définition 15

On appelle **série entière dérivée** de la série entière $\sum a_n z^n$ la série entière $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$.

Proposition 16

Une série entière $\sum a_n z^n$ et sa série entière dérivée $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ ont même rayon de convergence.

Théorème 17 (*Convergence normale des séries entières sur les disques fermés*)

Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement, donc uniformément, sur tout disque fermé centré en 0 et de rayon r strictement inférieur à R .

Corollaire 18 (*Convergence normale des séries entières sur tout compact*)

Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement, donc uniformément, sur toute partie compacte incluse dans le disque ouvert $D(0, R)$.

Proposition 19

La somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est continue sur son disque ouvert de convergence.

Théorème 20 (*Convergence normale des séries entières, cas réel*)

Une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment inclus dans $] - R; R[$.

Corollaire 21 (*Continuité de la somme d'une série entière, cas réel*)

La somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de variable réelle et de rayon de convergence $R > 0$, est continue sur $] - R; R[$.

Théorème 22 (*Intégrale d'une série entière*)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $[a; b]$ un segment inclus dans $] - R; R[$. Alors :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b a_n x^n dx \right).$$

Définition 23

On appelle **serie entière primitive** de $\sum a_n x^n$ la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Corollaire 24 (Primitive d'une série entière)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors la série entière primitive $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a le même rayon de convergence et sa somme est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $] -R; R[$. En d'autres termes, pour tout $x \in] -R; R[$, on a

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Théorème 25 (Dérivabilité de la somme d'une série entière)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -R; R[$ à valeurs dans \mathbb{C} . De plus, on a :

$$\forall x \in] -R; R[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Corollaire 26 (La somme d'une série entière est indéfiniment dérivable)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R; R[$ (à valeurs dans \mathbb{C}) et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme :

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in] -R; R[, \quad S^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n x^{n-p} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1) \dots (n+1) a_{n+p} x^n. \end{aligned}$$

Théorème 27 (Calcul des coefficients d'une série entière)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Corollaire 28 (Identification des coefficients de séries entières)

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a > 0$ et $R_b > 0$. On suppose qu'il existe un voisinage de 0 sur lequel on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition 29

On appelle **exponentielle complexe**, notée $\exp : z \mapsto e^z$, la somme de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ qui est de rayon de convergence infini. Ainsi, on a

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Proposition 30

1. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$e^z \neq 0 \text{ et } \frac{1}{e^z} = e^{-z}, \quad \overline{e^z} = e^{\overline{z}} \quad \text{et} \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$$

Définition 31

On définit les fonctions cosinus, sinus, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique complexes de la manière suivante : pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \operatorname{ch}(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \operatorname{sh}(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Définition 32

Soient $X \subset \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} contenant 0 et $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est **développable en série entière** en 0 s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0; R]$ tels que

$$D(0, r) \subset X \quad \text{et} \quad \forall z \in D(0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Définition 33

Soient $X \subset \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Soit $r > 0$ tel que $D(0, r) \subset X$. On dit que f est **développable en série entière sur $D(0, r)$** s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ (nécessairement $R > 0$) tel que

$$\forall z \in D(0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Définition 34

Soient $X \subset \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} un ouvert (de \mathbb{R} ou \mathbb{C}) et $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est développable en série entière en $z_0 \in X$ si la fonction $w \mapsto f(z_0 + w)$ est développable en série entière en 0. Dans ce cas, on appelle **développement en série entière** de f en z_0 la série $\sum a_n(z - z_0)^n$ telle que pour z au voisinage de z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Définition 35

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est **développable en série entière** en 0 s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et $r \in]0; R[$ tels que

$$] - r; r[\subset I \quad \text{et} \quad \forall x \in] - r; r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Définition 36

On appelle **série de Taylor** en $x_0 \in I$ d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ la série entière :

$$\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Théorème 37 (Condition nécessaire de développement en série entière)

Si la fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est développable en série entière en $x_0 \in I$, alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel f est de classe C^∞ et le développement en série entière de f en x_0 est sa série de Taylor en x_0 , c'est-à-dire

$$\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Proposition 38

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ sur un intervalle ouvert I contenant 0. Alors la fonction f est développable en série entière en 0 si et seulement si il existe un intervalle ouvert contenant 0 sur lequel la suite $(T_n)_n$ définie par

$$\forall x \in I, \quad T_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

converge simplement vers la fonction nulle.

Théorème 39 (Propriétés des fonctions développables en série entière)

1. Soient $f, g : X \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions développables en série entière en $z_0 \in X$. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, λf , $f + g$ et fg sont développables en série entière en z_0 .
2. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière en $x_0 \in I$. Alors les dérivées successives de f ainsi que les primitives de f sont développables en

série entière en x_0 .

Proposition 40 (Développement du binôme)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $] -1; 1[$ et :

$$\forall x \in] -1; 1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Famille de l'exponentielle :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
 e^z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \\
 \cos(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\
 \sin(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 \operatorname{ch}(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\
 \operatorname{sh}(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.
 \end{aligned}$$

Toutes ces séries entières ont un rayon de convergence $R = +\infty$.

Famille du binôme :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \\
 \frac{1}{1+z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n
 \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$,

$$\begin{aligned}
 -\ln(1-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
 \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \\
 \arctan(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \\
 \operatorname{argth}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \\
 \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \\
 \arcsin(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}
 \end{aligned}$$

Toutes ces séries entières ont un rayon de convergence égal à 1 (sauf pour celle donnant le développement de $(1+x)^\alpha$: son rayon vaut $R = 1$ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et vaut $R = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$).

FIGURE 1 – Développements en séries entières usuels