Définition 1

On appelle ***norme*** *sur* $\mathbb{R}^n$ *toute application* $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *vérifiant :*

(i). *axiome de séparation :* $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad N(x) = 0 \iff x = 0_{\mathbb{R}^n}$

(ii). *homogénéité :* $\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$

(iii). *inégalité triangulaire :* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Proposition 2 (*Inégalité triangulaire inversée*)

Soit $\|\,.\,\|$ *une norme sur* $\mathbb{R}^n$. *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Définition 3

On appelle ***norme euclidienne*** *sur* $\mathbb{R}^n$ *l'application* $\|\,.\,\|_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *définie par :*

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Proposition 4 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *on a*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) *est liée.*

Proposition 5

L'application $\|\,.\,\|_2$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^n$.

Définition 6

On appelle ***distance euclidienne*** *sur* $\mathbb{R}^n$ *l'application* $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *définie par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) = \|x - y\|.$$

Proposition 7

La distance euclidienne $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *vérifie :*

(i). *symétrie :* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) = d(y, x)$

(ii). *séparation :* $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$

(iii). *inégalité triangulaire :* $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Proposition 8

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\max_{k \in [\![1;n]\!]} |x_k| \leq \|x_k\| \leq \sqrt{n} \max_{k \in [\![1;n]\!]} |x_k|.$$

Définition 9

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On définit :
- *la **boule ouverte** de centre a et de rayon r par $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| < r\}$,*
- *la **boule fermée** de centre a et de rayon r par $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| \leq r\}$,*
- *la **sphère** de centre a et de rayon r par $S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x-a\| = r\}$.*

Proposition 10

*Une boule B (ouverte ou fermée) est une partie **convexe**, c'est-à-dire que*

$$\forall x, y \in B, \quad \forall \theta \in [0;1], \quad (1-\theta)x + \theta y \in B.$$

Une sphère (de rayon $r > 0$) n'est pas convexe.

Définition 11

*Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leq M.$$

*Si A est une partie bornée non vide de E, on définit son **diamètre** par :*

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{\|x-y\| \mid x, y \in A\}.$$

Proposition 12

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i). *A est bornée,*

(ii). *il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \geq 0$ tels que $A \subset \overline{B}(a,r)$.*

Définition 13

*On appelle **voisinage** d'un élément $x \in \mathbb{R}^n$ toute partie $V \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant :*

$$\exists r > 0, \quad B(x,r) \subset V.$$

Définition 14

*Une partie $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ est dite **ouverte** si elle est voisinage de chacun de ses points, i.e.*

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists r > 0, \quad B(x,r) \subset \mathcal{U}.$$

On dit encore que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 15

Une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

Proposition 16

*Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert.*

Proposition 17

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^p$, alors le produit cartésien $U \times V$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+p}$.

Définition 18

On dit qu'une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathbb{R}^n$ *est* ***bornée*** *s'il existe* $M \in \mathbb{R}^+$ *tel que* $\|u_k\| \leq M$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$.

Définition 19

On dit qu'une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathbb{R}^n$ *est* ***convergente*** *s'il existe* $\ell \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $\|u_k - \ell\| \longrightarrow 0$ *lorsque* $k \to +\infty$, *i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq N, \quad \|u_k - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ *est alors unique, on l'appelle limite de la suite* $(u_k)_k$ *et on note* $\ell = \lim\limits_{k\to+\infty} u_k$ *ou* $u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 20

Si $u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ *alors* $\|u_k\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$. *Par conséquent, toute suite convergente est bornée.*

Proposition 21

Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *deux suites d'éléments de* $\mathbb{R}^n$ *convergeant respectivement vers* ℓ *et* ℓ'. *Pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\lambda u_k + \mu v_k \longrightarrow \lambda\ell + \mu\ell \quad \text{quand } k \to +\infty.$$

En d'autres termes, l'ensemble des suites convergentes de E *est un espace vectoriel, et l'application* $(u_k)_k \longmapsto \lim\limits_{k\to+\infty} u_k$ *est linéaire.*

Proposition 22

Soient $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *une suite réelle convergeant vers* λ *et* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}^n$ *convergeant vers* $\ell \in \mathbb{R}^n$, *alors*

$$\lambda_k \cdot u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \cdot \ell.$$

Proposition 23

Soit $u = (u(k))_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathbb{R}^n$. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *on peut écrire*

$$u(k) = (u_1(k), \ldots, u_n(k)) \quad \text{avec } u_i(k) \in \mathbb{R} \quad \forall i \in [\![1; n]\!].$$

Les suites réelles $u_i = (u_i(k))_{k\in\mathbb{N}}$ *sont appelées suites coordonnées (ou composantes) de la suite vectorielle* u. *On a équivalence entre :*

(*i*). *la suite* u *converge,*

(*ii*). *les suites coordonnées* $u_1, \ldots, u_n$ *convergent.*

De plus, si tel est le cas, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} u(k) = (\lim\limits_{k\to+\infty} u_1(k), \ldots, \lim\limits_{k\to+\infty} u_n(k))$.

Définition 24

Soient X *une partie de* $\mathbb{R}^n$ *et* $a \in \mathbb{R}^n$. *On dit que* a *est un* ***point adhérent*** *à* X *s'il existe une suite* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ *d'éléments de* X *qui converge vers* a.

Définition 25

Soient $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et a un point adhérent à X. On dit que f **tend vers** *$\ell \in \mathbb{R}^p$ en a si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ est alors unique, et on note $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 26

Soient $f : X = X_1 \cup X_2 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, a un point adhérent à X_1 et à X_2 et $\ell \in \mathbb{R}^p$. Si $f(x) \underset{x \to a, x \in X_1}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{x \to a, x \in X_2}{\longrightarrow} \ell$, alors $f(x) \underset{x \to a, x \in X}{\longrightarrow} \ell$.

Théorème 27 (*Caractérisation séquentielle*)

Soient $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\ell \in \mathbb{R}^p$ et a un point adhérent à X. On a équivalence entre

(i). $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$,

(ii). $\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$, $x_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} a \Rightarrow f(x_k) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Proposition 28

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Pour tout $x \in X$, on peut écrire $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$ avec $f_i(x) \in \mathbb{R}$. On rappelle que les applications $f_1, \ldots, f_p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sont appelées applications coordonnées ou composantes de f. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ un point adhérent à X. On a équivalence entre :

(i). f tend vers $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$ en a,

(ii). pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, f_i tend vers ℓ_i en a.

Proposition 29

Soient $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell'$, alors $(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda \ell + \mu \ell'$.

Proposition 30

Soient $\alpha : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Si $\alpha(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}$ et $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, alors $(\alpha f)(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \lambda \ell$.

Proposition 31 (*Composition des limites*)

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : Y \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ avec $f(X) \subset Y$. Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$ et $g(y) \underset{y \to b}{\longrightarrow} \ell$, alors $g \circ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Définition 32

Soit $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ avec X une partie de $\mathbb{R}$ non majorée. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}^p$ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad x \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$. On définit de manière analogue $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$, pour $X \subset \mathbb{R}$ non minorée.

Définition 33

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ avec X une partie de $\mathbb{R}^p$ non bornée. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}^p$ lorsque

$\|x\| \to +\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad \|x\| \geq A \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Définition 34

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ et a un point adhérent à X. On dit que f tend vers $+\infty$ en a si

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$. On définit de manière analogue $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty$, $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, etc...

Définition 35

*On dit que $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est **continue** en $a \in X$ si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$, i.e. si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in X, \quad \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

Théorème 36

Soient $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in X$. On a équivalence entre :

(i). f est continue en a,

(ii). $\forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \quad \lim\limits_{k \to +\infty} x_k = a \Rightarrow \lim\limits_{k \to +\infty} f(x_k) = f(a)$.

Définition 37

*On dit que $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est **continue** sur X si f est continue en tout point $a \in X$. On note $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}^p$.*

Proposition 38

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On peut noter $f = (f_1, \ldots, f_p)$ avec $f_i : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ pour tout $i \in [\![1; p]\!]$. La fonction f est continue sur X si et seulement ses fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_p$ sont continues sur X.

Définition 39

*Une application $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite **lipschitzienne** s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\forall x, y \in X, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Proposition 40

Les applications lipschitziennes sont continues.

Proposition 41

Soient $f, g : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur X.

Proposition 42

Soient $\alpha : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ continues sur X. Le produit $\alpha \cdot f$ est continu sur X.

Proposition 43

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : Y \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ vérifiant $f(X) \subset Y$. Si f et g sont continues (resp. sur X et Y), la composée $g \circ f$ est continue sur X.

Proposition 44

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $U \subset X$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si la restriction de f à U, notée $f_{|_U}$, est continue sur U, alors f est continue en tout point de U.

Définition 45

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D$. Pour tout $j \in [\![2; n-1]\!]$, on définit les applications partielles

$$f_{a,j} : \begin{array}{ccc} D_{a,j} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \end{array} \quad \text{où} \quad D_{a,j} = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in D\}$$

et, en notant $D_{a,1} = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, a_2, \ldots, a_n) \in D\}$ et $D_{a,n} = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \ldots, a_{n-1}, t) \in D\}$,

$$f_{a,1} : \begin{array}{ccc} D_{a,1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & f(t, a_2, \ldots, a_n) \end{array} \quad \text{et} \quad f_{a,n} : \begin{array}{ccc} D_{a,n} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_{n-1}, t) \end{array}$$

Proposition 46

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Si f est continue en $a \in D$, alors l'application partielle $f_{a,j}$ est continue en a_j, pour tout $j \in [\![1; n]\!]$.

Définition 47

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est ***scalaire*** *si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si $p = 1$. On dit que f est à* ***valeurs vectorielles*** *sinon.*

Définition 48

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$. Pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, l'application $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée ***i-ème fonction composante*** *(ou* ***i-ème fonction coordonnée****) de f.*

Définition 49

*Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$. Pour tout $j \in [\![1; n]\!]$, on définit l'****application partielle*** *$f_{a,j}$ par*

$$f_{a,j} : \begin{array}{ccc} U_{a,j} \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \end{array}$$

où $U_{a,j} = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in U\}$ (la notation est abusive dans les cas $j = 1$ et $j = n$ pour lesquels il faut remplacer les expressions ci-dessus par $(t, a_2, \ldots, a_n)$ et $(a_1, \ldots, a_{n-1}, t)$ respectivement).

Définition 50

Soit I un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est ***dérivable*** *en a si le taux d'acroissement*

$$\frac{1}{t}(f(a+t) - f(a))$$

converge lorsque $t \to 0$ (avec $t \neq 0$). Sa limite est alors appelée ***vecteur dérivé*** *de f en a et noté*

$f'(a)$.

Définition 51

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite dérivable si elle l'est en tout point de l'ouvert non vide I. On peut alors introduire l'application $f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & f'(t) \end{array}$ appelée fonction dérivée de f.

Théorème 52

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_p$. On a équivalence entre :

(i). f est dérivable,

(ii). les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ sont dérivables.

De plus, si tel est le cas, on a

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = (f_1'(t), \ldots, f_p'(t)).$$

Définition 53

*Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. Soit $j \in [\![1; n]\!]$. On dit que f admet une **dérivée partielle** par rapport à sa j-ième variable au point a (encore appelée j-ième dérivée partielle en a) si l'application partielle $f_{a,j}$ est dérivable au point a_j.*

On note alors $\partial_j f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ cette dérivée, c'est-à-dire

$$\begin{array}{rcl} \partial_j f(a) & = & f'_{a,j}(a_j) \\ & = & \displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{t}. \end{array}$$

Définition 54

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ admet une dérivée partielle par rapport à sa j-ième variable en tout point $a \in U$, l'application $\partial_j f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est appelée j-ième dérivée partielle de f.

Proposition 55

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $f_1, \ldots, f_p : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ses applications coordonnées. On a équivalence entre :

(i). f admet des dérivées partielles,

(ii). les fonctions coordonnées de f admettent des dérivées partielles.

De plus, on a alors $(\partial_i f)_k = \partial_i(f_k)$ où l'on a noté f_k et $(\partial_i f)_k$ les fonctions coordonnées de f et $\partial_i f$.

Définition 56

*Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Si f admet des dérivées partielles par rapport à toutes ses variables au point a, on définit la matrice **Jacobienne** de f au point a, notée $J_f(a)$, comme la matrice à p lignes et n colonnes dont les coefficients sont*

$$(J_f(a))_{i,j} = \partial_j f_i(a) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \quad \forall i \in [\![1; p]\!], \forall j \in [\![1; n]\!].$$

On remarque que $J_f(a) \in \mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

Définition 57

Toujours sous réserve d'existence des dérivées partielles de f, soit $a \in U$:

- *si f est scalaire (i.e $p = 1$), on définit le* ***gradient*** *de f au point a, noté $\mathrm{grad}f(a)$ ou $\nabla f(a)$, par*

$$\mathrm{grad}f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(a) \\ \vdots \\ \partial_n f(a) \end{pmatrix} = {}^t J_f(a)$$

- *si $n = p$ (i.e. $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$), on définit la* ***divergence*** *de f au point a par*

$$\mathrm{div}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i(a) = {}_{(}J_f(a))$$

- *si $n = p = 3$, on définit le* ***rotationnel*** *de f au point a par*

$$\mathrm{rot}f(a) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3(a) - \partial_3 f_2(a) \\ \partial_3 f_1(a) - \partial_1 f_3(a) \\ \partial_1 f_2(a) - \partial_2 f_1(a) \end{pmatrix}$$

Définition 58

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^n$. On dit que f est ***dérivable selon le vecteur*** *v en a (ou admet une dérivée directionnelle suivant v en a) si la fonction d'une variable réelle $\varphi : t \longmapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0.*
On appelle alors dérivée selon le vecteur v de f en a la valeur de cette dérivée, notée

$$D_v f(a) = \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(a + tv) - f(a)).$$

Proposition 59

Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $a \in U$. Soit $j \in [\![1; n]\!]$. La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à sa j-ième variable en a si et seulement si elle admet une dérivée directionnelle selon le vecteur e_j en a.
Si c'est le cas, on a alors

$$\partial_j f(a) = D_{e_j} f(a).$$

Définition 60

On dit qu'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si toutes ses dérivées partielles existent et sont continues sur U. On note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble de ces fonctions.

Proposition 61

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On note $f_1, \dots f_p : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ les fonctions coordonnées de f. Les propositions sont équivalentes :

(i). f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U,

(ii). pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, la fonction f_i est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Théorème 62

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$. Pour tout $h = (h_1, \dots, h_n)$ tel que $a + h \in U$, on *peut écrire*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a) + \|h\| \varepsilon(h)$$

où ε est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ vérifiant $\varepsilon(h) \underset{h \to 0_{\mathbb{R}^n}}{\longrightarrow} 0_{\mathbb{R}^p}$.

Corollaire 63

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors elle est continue sur U.

Proposition 64

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in U$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors f admet une dérivée en a selon tout vecteur $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ et

$$D_h f(a) = \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a).$$

Proposition 65

Soient $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Proposition 66

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $\alpha : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f et α sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, il en est de même de la fonction αf.

Proposition 67 (*Formule de dérivée en chaîne*)

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telles que $f(U) \subset V$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors la fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. De plus ses dérivées partielles vérifient :

$$\forall a \in U, \quad \forall i \in [\![1; n]\!], \quad \partial_i (g \circ f)(a) = \sum_{k=1}^{p} \partial_i f_k(a) \partial_k g(f(a))$$

où l'on a noté $f_1, \ldots, f_p$ les fonctions coordonnées de f.

Corollaire 68

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telles que $f(U) \subset V$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors pour tout $a \in U$,

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a).$$

Définition 69

On appelle $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ vers un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ toute application bijective $f : U \longrightarrow V$ telle que f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 70

La bijection réciproque d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme en est un.

Proposition 71

La composée de deux $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes en est un.

Proposition 72

Si f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans un ouvert V de $\mathbb{R}^p$, alors $n = p$, pour tout $a \in U$, la Jacobienne de f en a, $J_f(a)$, est inversible et

$$(J_f(a))^{-1} = J_{f^{-1}}(f(a)).$$

Définition 73

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$. On appelle Jacobien de f en a le déterminant de la matrice Jacobienne de f en a.

Théorème 74 (*Théorème d'inversion globale (admis)*)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application injective de classe $\mathcal{C}^1$ sur U dont le Jacobien ne s'annule en aucun point de U. Alors $V = f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U sur V.

Définition 75

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. La fonction f est appelée dérivée partielle d'ordre 0 de f. Pour $k \in \mathbb{N}$ et sous réserve d'existence, on appelle dérivées partielles d'ordre $k+1$ de f les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre k de f.

Définition 76

Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si les dérivées partielles de f d'ordre k existent et sont continues sur U.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 77

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U, alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Lemme 78

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On a équivalence entre :

(i). *f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur U,*

(ii). *les dérivées partielles premières de f existent et sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.*

Proposition 79

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On a équivalence entre :

(i). *f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U,*

(ii). *les fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_p$ de f sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.*

Proposition 80

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur U. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 81

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : \alpha \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur U. Alors *le produit αf est aussi de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.*

Théorème 82 (*Composition*)

Soient $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^d$ avec U, V deux ouverts tels que $f(U) \subset V$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. sur U et V), alors la composée $g \circ f$ est elle-aussi de classe $\mathcal{C}^k$ (sur U).

Théorème 83 (*Théorème de Schwarz (admis)*)

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^2$. Alors les dérivées partielles croisées de f sont égales, c'est-à-dire que pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$,

$$\partial_i(\partial_j f) = \partial_j(\partial_i f) \quad \text{i.e.} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Corollaire 84

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$. Pour tous $i_1, \ldots, i_k \in [\![1; n]\!]$, pour toute permutation $\sigma \in S_k$ (groupe des permutations de $[\![1; k]\!]$), on a

$$\partial_{i_{\sigma(1)}}(\partial_{i_{\sigma(2)}}(\cdots(\partial_{i_{\sigma(k)}} f)\cdots)) = \partial_{i_1}(\cdots(\partial_{i_k} f)\cdots)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{\sigma(1)} \cdots \partial x_{\sigma(k)}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_1 \cdots \partial x_k}.$$