Définition 1

On appelle **norme** *sur E toute application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

(i). *axiome de séparation :* $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \iff x = 0_E$

(ii). *homogénéité :* $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$

(iii). *inégalité triangulaire :* $\forall x, y \in E, \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

On dit alors que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé.

Proposition 2 (*Inégalité triangulaire inversée*)

Soit $(E, \|\,.\,\|)$ un espace normé. Alors pour tous $x, y \in E$, on a

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Définition 3

Un vecteur x d'un espace normé E est dit **unitaire** *si $\|x\| = 1$.*

Proposition 4 (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*)

Pour tous $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Proposition 5

Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{k \in [\![1;n]\!]} |x_k|.$$

Les applications $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$ (norme euclidienne) et $\|\,.\,\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}^n$.

Définition 6

Soit $(E, \|\,.\,\|)$ est un espace normé. On appelle **distance associée** *à la norme $\|\,.\,\|$ sur E l'application*

$$\begin{array}{rccc} d: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, y) & \longmapsto & \|x - y\|. \end{array}$$

Proposition 7

La distance d associée à une norme $\|\,.\,\|$ sur E vérifie :

(i). $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = d(y, x)$ *[symétrie]*

(ii). $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$ *[séparation]*

(iii). $\forall x, y, z \in E, \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *[inégalité triangulaire]* .

Définition 8

Soient $(E, \|\,\|)$ un espace vectoriel normé. On appelle distance de x à une partie non vide A de E la *borne inférieure*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}.$$

Définition 9

Soient $(E, \|\,.\,\|)$ un espace normé, $a \in E$ et $r > 0$. On définit :
- *la **boule ouverte** de centre a et de rayon r par $B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$,*
- *la **boule fermée** de centre a et de rayon r par $\overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$,*
- *la **sphère** de centre a et de rayon r par $S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$.*

Définition 10

*Les boules de centre 0_E et de rayon 1 sont appelées **boules unités**.*

Proposition 11

*Une boule B (ouverte ou fermée) est une partie **convexe**, c'est-à-dire que*

$$\forall x, y \in B, \quad \forall \theta \in [0; 1], \quad (1 - \theta)x + \theta y \in B.$$

Une sphère (de rayon $r > 0$) n'est pas convexe.

Définition 12

*Une partie A d'un espace vectoriel normé E est dite **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leq M.$$

Définition 13

*Si A est une partie bornée non vide de E, on définit son **diamètre** par :*

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{\|x - y\| \mid x, y \in A\}.$$

Définition 14

*Soit X un ensemble non vide et E un espace vectoriel normé. On dit qu'une fonction vectorielle $f : X \longrightarrow E$ est **bornée** lorsque son image l'est, i.e.*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in X, \quad \|f(x)\| \leq M.$$

Proposition 15

Soient $f, g; X \longrightarrow E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si f et g sont bornées, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi.

Corollaire 16

L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des fonctions bornées de X dans E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(X, E)$ des fonctions de X dans E.

Proposition 17

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie peut être muni d'une norme.

Proposition 18

Pour toute fonction $f : X \longrightarrow E$ bornée, on définit

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

L'application $\|\,.\,\|_\infty$ définit une norme sur $\mathcal{B}(X,E)$.

- Soit E le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des séries numériques absolument convergentes. Les applications suivantes sont des normes sur E. Pour $u = \sum u_n$, on pose

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \sup\{|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

- Soient $a < b$ deux réels et $E = \mathcal{C}([a;b],\mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{K}$. Cet espace est inclus dans l'ensemble des fonctions bornées de $[a;b]$ dans $\mathbb{K}$. Les applications suivantes sont des normes sur E :

$$\|\,.\,\|_\infty : f \longmapsto \sup_{t\in[a;b]} |f(t)|\,, \quad \|\,.\,\|_1 : f \longmapsto \int_a^b |f(t)|\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \|\,.\,\|_2 : f \longmapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\, \mathrm{d}t}.$$

Proposition 19

Soient $(E_1,N_1),\dots,(E_p,N_p)$ des espaces normés et $E = E_1 \times \cdots \times E_p$. Les applications suivantes définies pour tout $x = (x_1,\dots,x_p) \in E$ par

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{p} N_k(x_k), \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} N_k(x_k)^2} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max\{N_k(x_k) \mid k \in [\![1;p]\!]\}$$

définissent des normes sur E.

Définition 20

*L'espace vectoriel normé $(E,\|\,.\,\|_\infty)$ est appelé **espace normé produit** des espaces normés $(E_1,N_1),\dots,(E_p,N_p)$.*

Définition 21

*Deux normes N_1 et N_2 sur un même espace E sont dites **équivalentes** si*

$$\exists C_1, C_2 > \mathbf{0}, \quad \forall x \in E, \quad C_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq C_2 N_1(x).$$

Théorème 22 (*Équivalence des normes en dimension finie (admis)*)

Sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, les normes sont deux à deux équivalentes.

Proposition 23

Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur E alors toute boule de centre a pour l'une des normes est incluse et contient des boules de même centre a (mais de rayons différents) pour l'autre norme.

Définition 24

On dit qu'une notion est invariante par passage à une norme équivalente si, lorsqu'elle est vérifiée dans un espace normé (E,N_1), elle l'est encore dans l'espace normé (E,N_2) quand N_2 est équivalente à N_1.

Définition 25

*On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ d'éléments de E est **bornée** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|u_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Définition 26

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *d'éléments de* E *est* **convergente** *s'il existe* $\ell \in E$ *tel que* $\|u_n - l\| \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \to +\infty$*, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Cet élément ℓ *est alors unique, on l'appelle limite de la suite* $(u_n)_n$ *et on note* $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *ou* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
On dit que la suite est **divergente** *dans le cas contraire.*

Proposition 27

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ *alors* $\|u_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$*. Par conséquent, toute suite convergente est bornée.*

Proposition 28

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites d'éléments de* E *convergeant respectivement vers* ℓ *et* ℓ'*. Pour tous* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$*, on a*

$$\lambda u_n + \mu v_n \longrightarrow \lambda\ell + \mu\ell \quad \text{ quand } n \to +\infty.$$

En d'autres termes, l'ensemble des suites convergentes de E *est un espace vectoriel, et l'application* $(u_n)_n \longmapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *est linéaire.*

Proposition 29

Soient $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *une suite numérique convergeant vers* λ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* E *convergeant vers* $\ell \in E$*, alors*

$$\lambda_n \cdot u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \cdot \ell.$$

Proposition 30

Deux normes équivalentes définissent les mêmes suites convergentes, et celles-ci ont les mêmes limites pour les deux normes. En d'autres termes, si N *et* N' *sont équivalentes, pour toute suite* $(u_n)_n$ *d'éléments de* E*, on a l'équivalence :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\overset{N}{\longrightarrow}} \ell \iff u_n \underset{n\to+\infty}{\overset{N'}{\longrightarrow}} \ell.$$

Définition 31

Les suites scalaires $u_k = (u_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sont appelées* **suites coordonnées (ou composantes)** *de la suite vectorielle* u *dans la base* e.

Proposition 32

On a équivalence entre :

(i). *la suite* u *converge,*

(ii). *les suites coordonnées* $u_1, \ldots, u_p$ *convergent.*

De plus, si tel est le cas, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u(n) = (\lim\limits_{n\to+\infty} u_1(n))e_1 + \cdots + (\lim\limits_{n\to+\infty} u_p(n))e_p$.

Proposition 33

On a équivalence entre :

(i). *la suite* $u = (u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge (pour la norme produit),*

(ii). *les suites coordonnées (ou composantes)* $u_k = (u_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent (respectivement pour* N_k*).*

Si tel est le cas, on a alors

$$\lim_{n\to+\infty} u(n) = (\lim_{n\to+\infty} u_1(n), \dots, \lim_{n\to+\infty} u_p(n)).$$